

Einige Anwendungen der Siegelschen Summenformel

INAUGURAL-DISSERTATION
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

vorgelegt dem Fachbereich Mathematik
der Philipps-Universität Marburg

von
Wolfgang Grotz
aus Bottrop

Marburg/Lahn 1977

Einige Anwendungen der Siegelschen Summenformel

INAUGURAL-DISSERTATION
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

vorgelegt dem Fachbereich Mathematik
der Philipps-Universität Marburg

von
Wolfgang Grotz
aus Bottrop

Marburg/Lahn 1977



Vom Fachbereich Mathematik
der Philipps-Universität Marburg/Lahn als

Dissertation angenommen am	8.7.1977
Tag der mündlichen Prüfung:	25.7.1977
Berichterstatter:	Prof. Dr. Schaal
Mitberichterstatter:	Prof. Dr. Gundlach

I N H A L T

§1	Einleitung	3
§2	Die Siegelsche Summenformel	9
§3	Hilfssätze	32
§4	Anwendungen	75
§5	Weitere Anwendungen	95
	Literatur	103



Digitized by the Internet Archive
in 2026

§1 Einleitung

Die Untersuchung wichtiger zahlentheoretischer Funktionen, insbesondere die Herleitung asymptotischer Beziehungen für deren summatorische Funktionen, bildet ein umfangreiches Gebiet der elementaren Zahlentheorie. Hierbei spielt die Gewinnung möglichst guter Restglieder eine wesentliche Rolle. Daher erscheint es naheliegend, entsprechende Untersuchungen auch in der allgemeineren Situation eines beliebigen algebraischen Zahlkörpers K anzustellen. Dabei mag man zunächst daran denken, Summen der Form

$$\sum_{N\alpha < x} f(\alpha)$$

zu behandeln, worin f eine auf der Menge der ganzen Ideale von K definierte Funktion bezeichnet und die Summe über alle von (0) verschiedenen ganzen Ideale α mit $N\alpha < x$ ($x > 0$) zu bilden ist. Die Behandlung solcher Summen erweist sich als relativ einfach insofern, als sie weitgehend analog wie im rationalen Fall durchgeführt werden kann. Ersetzt man hierin jedoch die ganzen Ideale durch ganze Zahlen, wobei die Summation über einen geeigneten endlichen Bereich erstreckt wird, so treten zusätzliche Schwierigkeiten auf, die vornehmlich durch die gegenüber dem rationalen Fall im allgemeinen kompliziertere Struktur der Einheitengruppe und der Idealklassengruppe eines algebraischen Zahlkörpers verursacht werden. Diesem Problem ist die vorliegende Arbeit gewidmet. *)

Sei K ein algebraischer Zahlkörper n -ten Grades mit der Diskriminante d und mit r_1 reellen und $2r_2$ nicht-reellen konjugierten Körpern. Eine Zahl $\gamma \in K$ heiße "total positiv" ($\gamma > 0$), wenn ihre

*) Herrn Prof. Dr. W. Schaal danke ich für die Anregung dieser Arbeit sowie für seine vielseitige Unterstützung. Ferner danke ich Herrn Dr. J. Hinz für zahlreiche Gespräche über den Gegenstand der Arbeit.

r_1 reellen Konjugierten positiv sind. Die Zahlen e_p seien definiert durch

$$e_p := \begin{cases} 1 & \text{für } 1 \leq p \leq r_1, \\ 2 & \text{für } r_1 < p \leq r_1 + r_2. \end{cases}$$

Ferner sei $f(\gamma)$ eine auf der Menge $\mathfrak{n}$ der ganzen Zahlen γ von K definierte Funktion mit der Eigenschaft: $f(\gamma\eta) = f(\gamma)$ für jede Einheit η einer gewissen Gruppe von Einheiten aus K .

Ziel dieser Arbeit ist es, asymptotische Beziehungen für die Summatorischen von zahlentheoretischen Funktionen dieser Art herzuleiten, d.h. für Ausdrücke der Form

$$F(x_1, \dots, x_{\hat{r}}) := \sum_{\substack{\gamma > 0 \\ 0 < |\gamma^{(h)}|^{e_h} < x_h}} f(\gamma),$$

worin $\hat{r} := r_1 + r_2$ gesetzt ist und mit $\gamma^{(h)}$ die Konjugierten von γ bezeichnet werden.

Das wichtigste Hilfsmittel hierzu ist die Siegelsche Summenformel (siehe [6], Satz 2), die in §2 in etwas verallgemeinerter Form bewiesen wird. Nach Bereitstellung weiterer Hilfsmittel in §3 werden in den §§ 4 und 5 als Anwendungen hierzu die Summatorischen einiger spezieller zahlentheoretischer Funktionen untersucht. Als erzeugende Dirichlet-Reihen werden geeignete Kombinationen von Heckschen Zeta-Funktionen verwendet.

In §4 werden folgende Funktionen behandelt:

$$1.) \quad D_k(x_1, \dots, x_{\hat{r}}) := \sum_{\substack{\gamma > 0 \\ 0 < |\gamma^{(h)}|^{e_h} < x_h}} d_k(\gamma)$$

$$\text{mit } d_k(\gamma) := \sum_{\alpha_1 \cdots \alpha_k = (\gamma)} 1, \quad k \geq 2;$$

$$2.) L(x_1, \dots, x_{\hat{r}}) := \sum_{\gamma > 0} \log N(\gamma) ;$$

$$0 < |\gamma^{(h)}| e_h < x_h$$

$$3.) T^*(x_1, \dots, x_{\hat{r}}) := \sum_{\gamma > 0} \frac{\tau(\gamma)}{N(\gamma)} \text{ mit } \tau(\gamma) := \sum_{\alpha/(\gamma)} Na ;$$

$$0 < |\gamma^{(h)}| e_h < x_h$$

$$4.) T(x_1, \dots, x_{\hat{r}}) := \sum_{\gamma > 0} \tau(\gamma) .$$

$$0 < |\gamma^{(h)}| e_h < x_h$$

Die Ergebnisse lauten:

Satz A: Ist $\hat{r} \geq 2$, so gilt für $x_1, \dots, x_{\hat{r}} > 0$ und für jedes $\delta > 0$:

$$1.) D_K(x_1, \dots, x_{\hat{r}}) = x_1 \cdots x_{\hat{r}}^{p_{k-1}} (\log x_1 \cdots x_{\hat{r}}) +$$

$$+ O\left((x_1 \cdots x_{\hat{r}})^{1 - \frac{1}{\langle k/2 \rangle r_1 + k r_2 + 1} + \delta}\right) ;$$

$$2.) L(x_1, \dots, x_{\hat{r}}) = \frac{(2\pi)^{r_2}}{|\sqrt{d}|} (x_1 \cdots x_{\hat{r}} \log x_1 \cdots x_{\hat{r}} - \hat{r} x_1 \cdots x_{\hat{r}}) +$$

$$+ O\left((x_1 \cdots x_{\hat{r}})^{1 - \frac{1}{n+1} + \delta}\right) ;$$

$$3.) T^*(x_1, \dots, x_{\hat{r}}) = \frac{(2\pi)^{r_2}}{|\sqrt{d}|} \zeta_K(2) x_1 \cdots x_{\hat{r}} + O\left((x_1 \cdots x_{\hat{r}})^{1 - \frac{1}{\hat{r}+1} + \delta}\right) ;$$

$$4.) T(x_1, \dots, x_{\hat{r}}) = \frac{(2\pi)^{r_2}}{|\sqrt{d}|} 2^{-\hat{r}} \zeta_K(2) (x_1 \cdots x_{\hat{r}})^2 +$$

$$+ O\left((x_1 \cdots x_{\hat{r}})^{2 - \frac{1}{\hat{r}+1} + \delta}\right) .$$

Darin bezeichnet $P_1(y)$ ein Polynom in y vom Grade 1 und $\langle y \rangle$ die kleinste ganze rationale Zahl, die größer oder gleich y ist; ferner wurde $\zeta_K(s) := \sum_{\mathfrak{a}} N\mathfrak{a}^{-s}$ gesetzt, worin über alle ganzen Ideale $\mathfrak{a} \neq (0)$ von K zu summieren ist.

Es hat den Anschein, daß die asymptotischen Beziehungen 1.), 3.) und 4.) von Bedeutung sind, wenn man das Selbergsche und das Linniksche Sieb in algebraischen Zahlkörpern für Zahlen (nicht für Ideale) formuliert.

Die Asymptotik 2.) ist von Bedeutung bei der Untersuchung der Größenordnung des Primideals mit der größten Norm, welches das Produkt

$$\prod_{\gamma > 0} p(\gamma) \quad \delta < |\gamma^{(h)}| e_{h < x_h}$$

mit $p(y) \in \mathfrak{o}[y]$ und $\delta > 0$ teilt (Verallgemeinerung der Nagelschen Untersuchungen).

In diesem Zusammenhang werde noch auf eine wohlbekannte Formel von Landau hingewiesen, nämlich

$$\sum_{Np \leq x} \log Np = x + O\left(x e^{-C\sqrt{\log x}}\right),$$

worin die Summe über alle Primideale p mit $Np \leq x$ erstreckt wird und C eine positive Konstante bezeichnet (vgl. [3], Satz LXXXIII). Diese Summe ist in gewisser Hinsicht mit der in 2.) angegebenen zu vergleichen: die Summanden stimmen überein, jedoch unterscheiden sich die Summationsbedingungen offenbar wesentlich voneinander.

In §5 werden die Funktionen

$$1.) M(x_1, \dots, x_r) := \sum_{\gamma > 0} \mu^2(\gamma) \quad 0 < |\gamma^{(h)}| e_{h < x_h}$$

mit $\mu(\gamma)$ als Moebiuscher Funktion,

$$2.) \quad D^{(2)}(x_1, \dots, x_{\hat{r}}) := \sum_{\gamma > 0} d^2(\gamma) \quad \text{mit} \quad d(\gamma) := \sum_{\alpha/(\gamma)} 1$$

$$0 < |\gamma^{(h)}|^{e_h} < x_h$$

untersucht. Bei der allgemeinen Behandlung dieser Funktionen treten Schwierigkeiten auf, die in dem etwas unübersichtlichen analytischen Verhalten gewisser gebrochen rationaler Ausdrücke von Heckeschen Zeta-Funktionen liegen; daher werden diese beiden Funktionen nur in solchen Zahlkörpern K betrachtet, die der folgenden Bedingung genügen:

die Idealklassengruppe $\mathfrak{h}$ von K ist das direkte Produkt von $(K_{\mathfrak{h}})$ Gruppen der Ordnung 2.

Unter dieser Einschränkung werden folgende Ergebnisse hergeleitet:

Satz B: Ist $\hat{r} \geq 2$ und die Bedingung $(K_{\mathfrak{h}})$ erfüllt, so gilt in den Bezeichnungen von Satz A für $x_1, \dots, x_{\hat{r}} > 0$ und für jedes $\delta > 0$:

$$1.) \quad M(x_1, \dots, x_{\hat{r}}) = \frac{(2\pi)^{r_2}}{|\sqrt{d}|} \frac{1}{\zeta_K(2)} x_1 \cdots x_{\hat{r}} +$$

$$+ O\left((x_1 \cdots x_{\hat{r}})^{1 - \frac{1}{2(\hat{r}+1)} + \delta}\right);$$

$$2.) \quad D^{(2)}(x_1, \dots, x_{\hat{r}}) = x_1 \cdots x_{\hat{r}} P_3(\log x_1 \cdots x_{\hat{r}}) +$$

$$+ O\left((x_1 \cdots x_{\hat{r}})^{1 - \frac{1}{2(n+1)} + \delta}\right).$$

Die Koeffizienten der in den Sätzen A und B auftretenden Polynome P_1 werden an späterer Stelle noch näher charakterisiert.

Wegen der Voraussetzung $\hat{n} \geq 2$ werden durch die Sätze A und B zwei Fälle nicht berücksichtigt, und zwar erstens der Trivialfall des rationalen Zahlkörpers und zweitens der Fall des imaginär-quadratischen Zahlkörpers. Da im imaginär-quadratischen Zahlkörper mit w als Anzahl der Einheitswurzeln ($w=6$ für $d=-3$, $w=4$ für $d=-4$, $w=2$ sonst)

$$\sum_{\substack{\gamma > 0 \\ 0 < |\gamma|^2 < x}} f(\gamma) = w \sum_{\substack{(\gamma) \\ 0 < N(\gamma) < x}} f(\gamma)$$

ist, kann auch dieser letztere Fall als trivial angesehen werden.

§2 Die Siegelsche Summenformel

Seien

$$\eta_1, \dots, \eta_r, \quad r = r_1 + r_2 - 1,$$

voneinander unabhängige total positive Einheiten unendlicher Ordnung, und sei ζ_0^* eine Erzeugende der Gruppe der total positiven Einheitswurzeln in K . Die Ordnung von ζ_0^* werde mit w_0 und die von den Einheiten $\zeta_0^*, \eta_1, \dots, \eta_r$ erzeugte Gruppe mit G bezeichnet. Zwei von 0 verschiedene Zahlen $\gamma_1, \gamma_2 \in K$ heißen "assoziert bzgl. G ", falls ihr Quotient Element von G ist. Sei

$$\mathcal{M} := 2\pi i \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_r \end{pmatrix},$$

worin $m_1, \dots, m_r$ ganze rationale Zahlen bezeichnen, und für ganze Zahlen $\gamma \in K, \gamma \neq 0$ sei mit $\hat{r} := r_1 + r_2$

$$\mathcal{Y}(\gamma) := \begin{pmatrix} \log |\gamma^{(1)}| \\ \vdots \\ \log |\gamma^{(\hat{r})}| \end{pmatrix}.$$

Die Zahlen $e_p, e_p^{(q)}, p=1, \dots, \hat{r}, q=1, \dots, r$, seien definiert durch die Gleichungen

$$\frac{1}{\hat{n}} \sum_{p=1}^{\hat{r}} e_p = 1, \quad \sum_{p=1}^{\hat{r}} e_p \log |\eta_h^{(p)}| = 0, \quad h = 1, \dots, r;$$

$$\sum_{p=1}^{\hat{r}} e_p^{(q)} = 0, \quad \sum_{p=1}^{\hat{r}} e_p^{(q)} \log |\eta_h^{(p)}| = \delta_{h,q}, \quad h, q = 1, \dots, r.$$

(Diese Definition der e_p stimmt offenbar mit der in §1 angegebenen überein.) Die $r \times \hat{r}$ -Matrix $(e_p^{(q)})$ (q Zeilenindex, p Spaltenindex) werde mit E bezeichnet. Ferner sei noch

$$E_p(m) := \frac{2\pi}{e_p} \sum_{q=1}^r m_q e_p^{(q)}, \quad p = 1, \dots, \hat{r},$$

$$\phi_m(s) := \sum_{\gamma}' \frac{f(\gamma)}{N(\gamma)^s} \exp\{m^T E_{\gamma}(\gamma)\},$$

wobei der Strich am Summenzeichen bedeutet, daß über ein volles System bzgl. G nicht assoziierter, total positiver ganzer Zahlen zu summieren ist. Mit diesen Bezeichnungen gilt der folgende Satz:

Satz 1: Ist $f(\gamma)$ eine auf der Menge der ganzen Zahlen von K definierte Funktion mit den Eigenschaften, daß

$$f(\zeta_0^* \gamma) = f(\gamma), \quad f(\eta_h \gamma) = f(\gamma), \quad h = 1, \dots, r,$$

ist und daß für eine geeignete Konstante $c > 0$ und $\gamma \neq 0$ die Funktion $f(\gamma) N(\gamma)^{-c}$ beschränkt ist, und ist ferner für

$$l := \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_{\hat{r}} \end{pmatrix}, \quad l_1, \dots, l_{\hat{r}} \geq 1,$$

und $x_1, \dots, x_{\hat{r}} > 0$ die Funktion $G(x_1, \dots, x_{\hat{r}}, l)$ definiert durch

$$G(x_1, \dots, x_{\hat{r}}, l) := \sum_{\gamma > 0} f(\gamma) \prod_{p=1}^{\hat{r}} (1 - |\gamma^{(p)}|^{e_p} x_p)^{l_p - 1},$$

$$0 < |\gamma^{(h)}|^{e_h} x_h < 1$$

so gilt für $\hat{r} \geq 2$, $l_1, \dots, l_{\hat{r}} \geq 2$ und $\sigma > c+1$:

$$G(x_1, \dots, x_{\hat{r}}, l)$$

$$= \frac{w_0}{2\pi i R} \sum_{m_1, \dots, m_r} \int_{-\infty}^{\sigma + i\infty} \phi_m(s) \prod_{p=1}^{\hat{r}} \left(x_p^{-s + iE_p(m)} B(l_p, s - iE_p(m)) \right) ds;$$

darin bezeichnet R den Regulator der Einheiten $\eta_1, \dots, \eta_r$ und B die Eulersche Beta-Funktion.

Beweis: Es sei

$$\mathbf{k} := \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_r \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} := \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_r \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{y}^{(p)} := \begin{pmatrix} e_p \log |\eta_1^{(p)}| \\ \vdots \\ e_p \log |\eta_r^{(p)}| \end{pmatrix}, \quad p = 1, \dots, \hat{r},$$

worin $k_1, \dots, k_r$ ganze rationale Zahlen und $v_1, \dots, v_r$ reelle Variable bezeichnen. Durch die Substitution

$$x_p = u^p \exp\{\mathbf{y}^{(p)}\}, \quad p = 1, \dots, \hat{r}, \quad (1)$$

wird die Funktion $G(x_1, \dots, x_{\hat{r}}, \ell)$ periodisch bzgl. jeder der Variablen $v_1, \dots, v_r$ mit der Periode 1, denn es ist für $q=1, \dots, r$

$$G(u^{e_1} \exp\{\mathbf{y}^{(1)} + e_1 \log |\eta_q^{(1)}|\}, \dots, u^{e_{\hat{r}}} \exp\{\mathbf{y}^{(\hat{r})} + e_{\hat{r}} \log |\eta_q^{(\hat{r})}|\}, \ell)$$

$$= G(x_1 |\eta_q^{(1)}|^{e_1}, \dots, x_{\hat{r}} |\eta_q^{(\hat{r})}|^{e_{\hat{r}}}, \ell)$$

$$= \sum_{\gamma > 0} f(\gamma) \prod_{p=1}^{\hat{r}} (1 - |\gamma^{(p)}|^{e_p} x_p |\eta_q^{(p)}|^{e_p})^{-1} p^{-1}$$

$$0 < |\gamma^{(h)}|^{e_h} x_h |\eta_q^{(h)}|^{e_h} < 1$$

$$= \sum_{\gamma > 0} f(\gamma) \prod_{p=1}^{\hat{r}} (1 - |\gamma^{(p)}|^{e_p} \eta_q^{(p)} x_p)^{-1} p^{-1}$$

$$0 < |\gamma^{(h)}|^{e_h} \eta_q^{(h)} x_h < 1$$

$$= \sum_{\beta > 0} f(\beta) \prod_{p=1}^{\hat{r}} (1 - |\beta^{(p)}|^{e_p} x_p)^{1/p-1} = G(x_1, \dots, x_{\hat{r}}, \ell) \cdot \\ 0 < |\beta^{(h)}|^{e_h} x_h < 1$$

Die Funktion $G(x_1(\eta), \dots, x_{\hat{r}}(\eta), \ell)$ soll nun in eine Fourier-Reihe

$$\sum_{m_1, \dots, m_r = -\infty}^{\infty} a_m(u) \exp\{i\eta^T m\} \quad (2)$$

entwickelt werden; die Koeffizienten $a_m(u)$ dieser Reihe sind gegeben durch

$$a_m(u) = \int_0^1 \dots \int_0^1 \exp\{-i\eta^T m\} G(x_1(\eta), \dots, x_{\hat{r}}(\eta), \ell) dv_1 \dots dv_r \\ = \int_0^1 \dots \int_0^1 \exp\{-i\eta^T m\} \sum_{\gamma > 0} f(\gamma) \prod_{p=1}^{\hat{r}} (1 - |\gamma^{(p)}|^{e_p} x_p(\eta))^{1/p-1} \cdot \\ 0 < |\gamma^{(h)}|^{e_h} x_h(\eta) < 1 \\ \cdot dv_1 \dots dv_r$$

$$= \int_0^1 \dots \int_0^1 \exp\{-i\eta^T m\} w_0 \sum_{\gamma}' f(\gamma) \sum_{k_1, \dots, k_r = -\infty}^{\infty} \cdot \\ 0 < N(\gamma) < u^{-n} \\ \cdot \sum_{\substack{\gamma \\ 0 < |\gamma^{(h)}|^{e_h} x_h(\eta + \frac{\eta}{\ell}) < 1}} \prod_{p=1}^{\hat{r}} (1 - |\gamma^{(p)}|^{e_p} x_p(\eta + \frac{\eta}{\ell}))^{1/p-1} dv_1 \dots dv_r$$

$$= w_0 \sum_{k_1, \dots, k_r = -\infty}^{\infty} \int_0^1 \dots \int_0^1 \exp\{-i\eta^T m\} \sum_{\gamma}' f(\gamma) \cdot \\ 0 < N(\gamma) < u^{-n}$$

$$\cdot \sum_{\substack{\gamma \\ 0 < |\gamma^{(h)}|^{e_h} x_h(\eta + \frac{\eta}{\ell}) < 1}} \prod_{p=1}^{\hat{r}} (1 - |\gamma^{(p)}|^{e_p} x_p(\eta + \frac{\eta}{\ell}))^{1/p-1} dv_1 \dots dv_r \cdot$$

Darin ist die Vertauschung von Summation und Integration gerechtfertigt, da die Summe endlich ist. Ersetzt man $v_q + k_q$ durch v_q , $q=1, \dots, r$, so erhält man

$$\begin{aligned}
 a_m(u) &= w_0 \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-m^T m\} \sum_{\substack{\gamma \\ 0 < N(\gamma) < u^{-n}}} f(\gamma) \sum_{\substack{h \\ 0 < |\gamma^{(h)}| e_h x_h(m) < 1}} \cdot \\
 &\quad \cdot \prod_{p=1}^{\hat{r}} (1 - |\gamma^{(p)}| e_p x_p(m))^{1/p-1} dv_1 \cdots dv_r \\
 &= w_0 \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-m^T m\} \sum_{\substack{\gamma \\ 0 < |\gamma^{(h)}| e_h x_h(m) < 1}} f(\gamma) \cdot \\
 &\quad \cdot \prod_{p=1}^{\hat{r}} (1 - |\gamma^{(p)}| e_p x_p(m))^{1/p-1} dv_1 \cdots dv_r .
 \end{aligned}$$

Als nächstes soll für $\sigma > c+1$ das Integral

$$\int_0^{\infty} u^{ns-1} a_m(u) du$$

gebildet und hierin die Substitution (1) durchgeführt werden; für das Reziproke der Funktionaldeterminante berechnet man:

$$\frac{\partial(x_1, \dots, x_{\hat{r}})}{\partial(v_1, \dots, v_r, u)} = \left| \det \begin{pmatrix} e_1 x_1 \log |\eta_1^{(1)}| & \cdots & e_1 x_1 \log |\eta_r^{(1)}| & e_1 \frac{x_1}{u} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ e_r x_r \log |\eta_1^{(r)}| & \cdots & e_r x_r \log |\eta_r^{(r)}| & e_r \frac{x_r}{u} \\ e_{\hat{r}} x_{\hat{r}} \log |\eta_1^{(\hat{r})}| & \cdots & e_{\hat{r}} x_{\hat{r}} \log |\eta_r^{(\hat{r})}| & e_{\hat{r}} \frac{x_{\hat{r}}}{u} \end{pmatrix} \right|$$

$$\begin{aligned}
 &= \left| \frac{x_1 \cdots x_{\hat{r}}}{u} \det \begin{pmatrix} e_1 \log |\eta_1^{(1)}| & \cdots & e_1 \log |\eta_r^{(1)}| & e_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ e_r \log |\eta_1^{(r)}| & \cdots & e_r \log |\eta_r^{(r)}| & e_r \\ e_{\hat{r}} \log |\eta_1^{(\hat{r})}| & \cdots & e_{\hat{r}} \log |\eta_r^{(\hat{r})}| & e_{\hat{r}} \end{pmatrix} \right| \\
 &= \left| u^{n-1} \det \begin{pmatrix} e_1 \log |\eta_1^{(1)}| & \cdots & e_1 \log |\eta_r^{(1)}| & e_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ e_r \log |\eta_1^{(r)}| & \cdots & e_r \log |\eta_r^{(r)}| & e_r \\ 0 & & 0 & n \end{pmatrix} \right| = u^{n-1} n R ;
 \end{aligned}$$

ferner ist nach (1)

$$\log x_p = e_p \log u + \sum_{h=1}^r v_h e_p \log |\eta_h^{(p)}|, \quad p = 1, \dots, \hat{r};$$

durch Multiplikation mit $e_p^{(q)}/e_p$ und Summation über p wird hieraus

$$\begin{aligned}
 \sum_{p=1}^{\hat{r}} \frac{e_p^{(q)}}{e_p} \log x_p &= \log u \sum_{p=1}^{\hat{r}} e_p^{(q)} + \sum_{h=1}^r v_h \sum_{p=1}^{\hat{r}} e_p^{(q)} \log |\eta_h^{(p)}| \\
 &= \sum_{h=1}^r v_h \delta_{h,q} = v_q, \quad q = 1, \dots, r;
 \end{aligned}$$

also ist

$$\begin{aligned}
 \exp(-\mathbf{m}^T \mathbf{m}) &= \exp \left\{ -2\pi i \sum_{q=1}^r v_q m_q \right\} = \exp \left\{ -2\pi i \sum_{p=1}^{\hat{r}} \frac{\log x_p}{e_p} \sum_{q=1}^r m_q e_p^{(q)} \right\} \\
 &= \exp \left\{ -i \sum_{p=1}^{\hat{r}} E_p(\mathbf{m}) \log x_p \right\} = \prod_{p=1}^{\hat{r}} x_p^{-i E_p(\mathbf{m})};
 \end{aligned}$$

berücksichtigt man noch

$$\frac{u^{ns-1}}{u^{n-1}} = u^{n(s-1)} = \prod_{p=1}^{\hat{r}} x_p^{s-1},$$

so erhält man

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\infty} u^{ns-1} a_m(u) du \\
 &= \frac{w_0}{nR} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \prod_{p=1}^{\hat{r}} x_p^{s-1-iE_p(m)} \sum_{\gamma} f(\gamma) \prod_{p=1}^{\hat{r}} (1-|\gamma^{(p)}|^{e_p} x_p)^{1_p-1} \cdot \\
 & \quad 0 < |\gamma^{(h)}|^{e_h} x_h < 1 \quad \cdot dx_1 \dots dx_{\hat{r}} \\
 &= \frac{w_0}{nR} \sum_{\gamma} f(\gamma) \prod_{p=1}^{\hat{r}} \int_0^{|\gamma^{(p)}|^{-e_p}} x_p^{s-1-iE_p(m)} (1-|\gamma^{(p)}|^{e_p} x_p)^{1_p-1} dx_p ;
 \end{aligned}$$

durch die Substitution $t_p = |\gamma^{(p)}|^{e_p} x_p$ geht dies über in

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\infty} u^{ns-1} a_m(u) du \\
 &= \frac{w_0}{nR} \sum_{\gamma} f(\gamma) \prod_{p=1}^{\hat{r}} \int_0^1 \left(\frac{t_p}{|\gamma^{(p)}|^{e_p}} \right)^{s-1-iE_p(m)} (1-t_p)^{1_p-1} \frac{dt_p}{|\gamma^{(p)}|^{e_p}} \\
 &= \frac{w_0}{nR} \sum_{\gamma} \frac{f(\gamma)}{N(\gamma)^s} \exp \left\{ i \sum_{p=1}^{\hat{r}} E_p(m) e_p \log |\gamma^{(p)}| \right\} \cdot \\
 & \quad \cdot \prod_{p=1}^{\hat{r}} \int_0^1 t_p^{s-1-iE_p(m)} (1-t_p)^{1_p-1} dt_p \\
 &= \frac{w_0}{nR} \sum_{\gamma} \frac{f(\gamma)}{N(\gamma)^s} \exp \{ m^T E g(\gamma) \} \prod_{p=1}^{\hat{r}} B(1_p, s-iE_p(m)) \\
 &= \frac{w_0}{nR} \phi_m(s) \prod_{p=1}^{\hat{r}} B(1_p, s-iE_p(m)) ;
 \end{aligned}$$

die Anwendung der Mellinschen Umkehrformel liefert für $\sigma > c+1$

$$a_m(u) = \frac{w_0}{2\pi i R} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} u^{-ns} \phi_m(s) \prod_{p=1}^{\hat{r}} B(l_p, s - iE_p(m)) ds.$$

Um zu zeigen, daß die mit diesen Koeffizienten gebildete Reihe (2) die Funktion $G(x_1(m), \dots, x_{\hat{r}}(m), l)$ darstellt, genügt es wegen der Stetigkeit von G , die gleichmäßige Konvergenz dieser Reihe bzgl. m nachzuweisen.

Setzt man für reelles y

$$[y] := \max\{g \in \mathbb{Z} | g \leq y\}$$

und für $\sigma > 0$

$$yB(y, s)|_{y=0} := y\Gamma(y)|_{y=0} := 1,$$

so gilt für $l \geq 1$ und $\sigma > 0$

$$\begin{aligned} B(l, s) &= \frac{\Gamma(l)\Gamma(s)}{\Gamma(l+s)} = \frac{(l-1) \cdots (l-[l])\Gamma(l-[l])\Gamma(s+[l])}{s(s+1) \cdots (s+[l]-1)\Gamma(l+s)} \\ &= \frac{(l-1) \cdots (l-[l]+1)}{s(s+1) \cdots (s+[l]-1)} (1-[l])B(l-[l], s+[l]); \end{aligned}$$

daher ist für $\sigma > c+1$ und für $l_p \geq 2$

$$\begin{aligned} |a_m(u) \exp\{m^T m\}| &= |a_m(u)| \\ &\leq \frac{w_0}{2\pi R} \left| \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} u^{-ns} \phi_m(s) \prod_{p=1}^{\hat{r}} B(l_p, s - iE_p(m)) ds \right| \\ &= \frac{w_0}{2\pi R} \left| \int_{-\infty}^{\infty} u^{-n(\sigma+it)} \phi_m(\sigma+it) \prod_{p=1}^{\hat{r}} B(l_p, \sigma+it - iE_p(m)) dt \right| \\ &\leq \frac{w_0 u^{-n\sigma}}{2\pi R} \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_m(\sigma+it)| \prod_{p=1}^{\hat{r}} |B(l_p, \sigma+it - iE_p(m))| dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \leq \frac{w_0 u^{-n\sigma}}{2\pi R} \left\{ \sum_Y' \frac{|f(\gamma)|}{N(\gamma)^\sigma} \right\} \cdot \\
 & \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{r}}{\prod_{p=1}^{\infty} \left\{ \frac{(1_p-1) \cdots (1_p-[1_p]+1)}{|\sigma+it-iE_p(\mathcal{M})| |\sigma+1+it-iE_p(\mathcal{M})| \cdots |\sigma+[1_p]-1+it-iE_p(\mathcal{M})|} \cdot \right.} \\
 & \quad \left. \cdot (1_p-[1_p]) B(1_p-[1_p], \sigma+[1_p]+it-iE_p(\mathcal{M})) \right\} dt \\
 & \leq \frac{w_0 u^{-n\sigma}}{2\pi R} \left\{ \sum_Y' \frac{|f(\gamma)|}{N(\gamma)^\sigma} \right\} \cdot \\
 & \cdot \frac{\hat{r}}{\prod_{p=1}^{\infty} \left\{ (1_p-1) \cdots (1_p-[1_p]+1) (1_p-[1_p]) B(1_p-[1_p], \sigma+[1_p]) \right\}} \cdot \\
 & \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{r}}{\prod_{p=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{|\sigma+it-iE_p(\mathcal{M})| |\sigma+1+it-iE_p(\mathcal{M})| \cdots |\sigma+[1_p]-1+it-iE_p(\mathcal{M})|} \right\}} dt \\
 & \leq c_1(\sigma) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{r}}{\prod_{p=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{|\sigma+it-iE_p(\mathcal{M})| |\sigma+1+it-iE_p(\mathcal{M})|} \right\}} dt \\
 & \leq c_1(\sigma) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{r}}{\prod_{p=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{|\sigma+it-iE_p(\mathcal{M})|^2} \right\}} dt \\
 & = c_1(\sigma) \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{r}{\prod_{p=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{|\sigma+i\tau-i(E_p(\mathcal{M})-E_{\hat{r}}(\mathcal{M}))|^2} \right\}} \right\} \frac{d\tau}{|\sigma+i\tau|^2} ,
 \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
 |a_{\mathcal{M}}(u) \exp\{w^T \mathcal{M}\}| &= |a_{\mathcal{M}}(u)| \\
 &\leq c_1(\sigma) \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{r}{\prod_{p=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{|\sigma+i\tau-i(E_p(\mathcal{M})-E_{\hat{r}}(\mathcal{M}))|^2} \right\}} \right\} \frac{d\tau}{|\sigma+i\tau|^2} . \quad (3)
 \end{aligned}$$

Zur weiteren Behandlung der Reihe

$$\sum_{m_1, \dots, m_r = -\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r}{\prod_{p=1}^r} \frac{1}{|\sigma + i\tau - i(E_p(\mathcal{M}) - E_{\hat{r}}(\mathcal{M}))|^2} \frac{d\tau}{|\sigma + i\tau|^2}$$

ist zunächst festzustellen, daß

$$\det \left(\frac{e_p^{(q)}}{e_p} - \frac{e_{\hat{r}}^{(q)}}{e_{\hat{r}}} \right)_{p,q=1,\dots,r} \neq 0 \quad (4)$$

ist; dies ist richtig wegen

$$\begin{aligned} & \det \begin{pmatrix} \frac{e_1^{(1)}}{e_1} - \frac{e_{\hat{r}}^{(1)}}{e_{\hat{r}}} & \dots & \frac{e_1^{(r)}}{e_1} - \frac{e_{\hat{r}}^{(r)}}{e_{\hat{r}}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{e_r^{(1)}}{e_r} - \frac{e_{\hat{r}}^{(1)}}{e_{\hat{r}}} & \dots & \frac{e_r^{(r)}}{e_r} - \frac{e_{\hat{r}}^{(r)}}{e_{\hat{r}}} \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \frac{e_1^{(1)}}{e_1} - \frac{e_{\hat{r}}^{(1)}}{e_{\hat{r}}} & \dots & \frac{e_1^{(r)}}{e_1} - \frac{e_{\hat{r}}^{(r)}}{e_{\hat{r}}} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{e_r^{(1)}}{e_r} - \frac{e_{\hat{r}}^{(1)}}{e_{\hat{r}}} & \dots & \frac{e_r^{(r)}}{e_r} - \frac{e_{\hat{r}}^{(r)}}{e_{\hat{r}}} & 0 \\ \frac{e_{\hat{r}}^{(1)}}{e_{\hat{r}}} & \dots & \frac{e_{\hat{r}}^{(r)}}{e_{\hat{r}}} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \frac{e_1^{(1)}}{e_1} & \dots & \frac{e_1^{(r)}}{e_1} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{e_{\hat{r}}^{(1)}}{e_{\hat{r}}} & \dots & \frac{e_{\hat{r}}^{(r)}}{e_{\hat{r}}} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} e_1 \log |\eta_1^{(1)}| & \dots & e_{\hat{r}} \log |\eta_1^{(\hat{r})}| & -1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ e_1 \log |\eta_r^{(1)}| & & e_{\hat{r}} \log |\eta_r^{(\hat{r})}| & \\ \frac{e_1}{n} & \dots & \frac{e_{\hat{r}}}{n} & \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \det \begin{pmatrix} e_1 \log |\eta_1^{(1)}| & \cdots & e_r \log |\eta_1^{(r)}| & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ e_1 \log |\eta_r^{(1)}| & \cdots & e_r \log |\eta_r^{(r)}| & 0 \\ \frac{e_1}{n} & \cdots & \frac{e_r}{n} & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \pm \frac{1}{R} .$$

Sei jetzt

$$\pi^{(q)} = 2\pi \begin{pmatrix} \frac{e_1^{(q)}}{e_1} - \frac{e_{\hat{r}}^{(q)}}{e_{\hat{r}}} \\ \vdots \\ \frac{e_r^{(q)}}{e_r} - \frac{e_{\hat{r}}^{(q)}}{e_{\hat{r}}} \end{pmatrix}, \quad q = 1, \dots, r, \quad ,$$

und seien für festes reelles τ die Zahlen τ_q , $q=1, \dots, r$, definiert durch

$$\begin{pmatrix} \tau \\ \vdots \\ \tau \end{pmatrix} = \sum_{q=1}^r \tau_q \pi^{(q)} .$$

Wegen (4) ist die Anzahl derjenigen Gitterpunkte des durch die Vektoren $\pi^{(1)}, \dots, \pi^{(r)}$ erzeugten Gitters, deren Komponenten die Gestalt $\tau_q - m_q$ mit ganzen rationalen Zahlen m_q haben und die in einem abgeschlossenen Würfel der Kantenlänge 1 liegen, durch eine nur von diesen Vektoren und damit nur vom Körper K abhängige Konstante G_K beschränkt. Daher ist die Anzahl der ganz-rationalen Lösungen des Ungleichungssystems

$$b_p \leq \left| \sum_{q=1}^r (\tau_q - m_q) 2\pi \left(\frac{e_p^{(q)}}{e_p} - \frac{e_{\hat{r}}^{(q)}}{e_{\hat{r}}} \right) \right| \leq b_{p+1}, \quad p = 1, \dots, r, \quad ,$$

in dem die b_p feste nicht-negative ganze rationale Zahlen bezeichnen, durch die Konstante $2^r G_K$ beschränkt. Aufgrund dieser Überlegungen erhält man

$$\sum_{m_1, \dots, m_r = -\infty}^{\infty} \prod_{p=1}^r \frac{1}{|\sigma + i\tau - i(E_p(m) - E_{\hat{r}}(m))|^2}$$

$$\leq 2^{rG_K} \sum_{b_1, \dots, b_r = 0}^{\infty} \prod_{p=1}^r \frac{1}{|\sigma + ib_p|^2} = 2^{rG_K} \prod_{p=1}^r \sum_{b_p=0}^{\infty} \frac{1}{\sigma^2 + b_p^2} =: c_2(\sigma)$$

also folgt

$$\sum_{m_1, \dots, m_r = -\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \prod_{p=1}^r \frac{1}{|\sigma + i\tau - i(E_p(m) - E_{\hat{r}}(m))|^2} \right\} \frac{d\tau}{|\sigma + i\tau|^2}$$

$$\leq c_2(\sigma) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{|\sigma + i\tau|^2} ;$$

in Verbindung mit (3) ersieht man hieraus, daß die Reihe

$$\sum_{m_1, \dots, m_r = -\infty}^{\infty} |a_m(u)|$$

eine konvergente Majorante der betrachteten Reihe (2) ist. Für $\hat{r} \geq 2$, $l_1, \dots, l_{\hat{r}} \geq 2$ und $\sigma > c+1$ gilt somit

$$G(x_1, \dots, x_{\hat{r}}, \ell) = \sum_{m_1, \dots, m_r = -\infty}^{\infty} a_m(u) \exp\{m^T m\}$$

$$= \frac{w_0}{2\pi i R} \sum_{m_1, \dots, m_r = -\infty}^{\infty} \exp\{m^T m\} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} u^{-ns} \phi_m(s) \prod_{p=1}^{\hat{r}} B(l_p, s - iE_p(m)) ds$$

wegen

$$u^n = \prod_{p=1}^{\hat{r}} x_p, \quad \exp\{m^T m\} = \prod_{p=1}^{\hat{r}} x_p^{iE_p(m)}$$

folgt hieraus die Behauptung des Satzes.

Als nächstes soll die folgende Beziehung bewiesen werden:

Hilfssatz 1: Für ganze rationale Zahlen $l_1, \dots, l_{\hat{r}} \geq 0$ und für $y_1^{(1)}, \dots, y_{l_1}^{(1)}, \dots, y_1^{(\hat{r})}, \dots, y_{l_{\hat{r}}}^{(\hat{r})} > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{y_{l_{\hat{r}}}^{(\hat{r})}} \dots \int_0^{y_1^{(\hat{r})}} \dots \int_0^{y_{l_1}^{(1)}} \dots \int_0^{y_1^{(1)}} G \left(\frac{1}{x_1 + v_1^{(1)} + \dots + v_{l_1}^{(1)}}, \dots, \frac{1}{x_{\hat{r}} + v_1^{(\hat{r})} + \dots + v_{l_{\hat{r}}}^{(\hat{r})}}, \right. \\
 & \quad \left. , (1, \dots, 1)^T \right) dv_1^{(1)} \dots dv_{l_1}^{(1)} \dots dv_1^{(\hat{r})} \dots dv_{l_{\hat{r}}}^{(\hat{r})} \\
 &= \sum_{k^{(1)}=0}^{l_1} \dots \sum_{k^{(\hat{r})}=0}^{l_{\hat{r}}} (-1)^{\sum_{p=1}^{\hat{r}} (k^{(p)} + l_p)} \sum_{1 \leq j_1^{(1)} < \dots < j_{k^{(1)}}^{(1)} \leq l_1} \dots \\
 & \quad \dots \sum_{1 \leq j_1^{(\hat{r})} < \dots < j_{k^{(\hat{r})}}^{(\hat{r})} \leq l_{\hat{r}}} G \left(\frac{1}{x_1 + y_{j_1^{(1)}}^{(1)} + \dots + y_{j_{k^{(1)}}^{(1)}}^{(1)}}, \dots \right. \\
 & \quad \left. \dots, \frac{1}{x_{\hat{r}} + y_{j_1^{(\hat{r})}}^{(\hat{r})} + \dots + y_{j_{k^{(\hat{r})}}^{(\hat{r})}}^{(\hat{r})}}, \ell + (1, \dots, 1)^T \right) \cdot \\
 & \quad \cdot \prod_{p=1}^{\hat{r}} \frac{1}{l_p!} \left(x_p + y_{j_1^{(p)}}^{(p)} + \dots + y_{j_{k^{(p)}}^{(p)}}^{(p)} \right)^{l_p} ,
 \end{aligned}$$

worin die Summanden für $k^{(p)}=0$ in naheliegender Weise zu interpretieren sind.

Beweis: Der Beweis wird durch Induktion nach

$$m := \sum_{p=1}^{\hat{r}} l_p$$

geführt. Für $m=0$ ist $l_1 = \dots = l_{\hat{r}} = 0$; in diesem Fall ist die Aussage trivial. Sie werde also für ein $m \geq 0$ als richtig vorausgesetzt. Seien nun $l_1, \dots, l_{\hat{r}}$ nicht-negative ganze rationale Zahlen mit

$$\sum_{p=1}^{\hat{r}} l_p = m+1 ;$$

dann gibt es ein p_0 mit $l_{p_0} \geq 1$. Mit den Abkürzungen

$$w_{1_p}^{(p)} := v_1^{(p)} + \dots + v_{l_p}^{(p)} , \quad t^{(p)} := y_{j_1}^{(p)} + \dots + y_{j_k}^{(p)} , \quad p=1, \dots, \hat{r} ,$$

$$l' := \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_{p_0} - 1 \\ \vdots \\ l_{\hat{r}} \end{pmatrix}$$

gilt dann

$$\begin{aligned} & y_{l_{\hat{r}}}^{(\hat{r})} y_1^{(\hat{r})} y_{l_1}^{(1)} y_1^{(1)} \\ & \int_0^{\hat{r}} \dots \int_0^{\hat{r}} \dots \int_0^1 \dots \int_0^1 G \left(\frac{1}{x_1 + w_{l_1}^{(1)}}, \dots, \frac{1}{x_{\hat{r}} + w_{l_{\hat{r}}}^{(\hat{r})}}, (1, \dots, 1)^T \right) \cdot \\ & \quad \cdot dv_1^{(1)} \dots dv_{l_1}^{(1)} \dots dv_1^{(\hat{r})} \dots dv_{l_{\hat{r}}}^{(\hat{r})} \\ & = \int_0^{(p_0)} y_{l_{p_0}}^{(p_0)} \left\{ y_{l_{\hat{r}}}^{(\hat{r})} y_1^{(\hat{r})} y_{l_{p_0}-1}^{(p_0)} y_1^{(p_0)} y_{l_1}^{(1)} y_1^{(1)} \right. \\ & \quad \cdot G \left(\frac{1}{x_1 + w_{l_1}^{(1)}}, \dots, \frac{1}{x_{p_0} + w_{l_{p_0}-1}^{(p_0)} + v_{l_{p_0}}^{(p_0)}}, \dots, \frac{1}{x_{\hat{r}} + w_{l_{\hat{r}}}^{(\hat{r})}}, (1, \dots, 1)^T \right) \cdot \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot dv_1^{(1)} \dots dv_{l_1}^{(1)} \dots dv_1^{(p_o)} \dots dv_{l_{p_o}-1}^{(p_o)} \dots dv_1^{(\hat{r})} \dots dv_{l_{\hat{r}}}^{(\hat{r})} dv_{l_{p_o}}^{(p_o)} \\
 & = \sum_{k^{(1)}=0}^{l_1} \dots \sum_{k^{(p_o)}=0}^{l_{p_o}-1} \dots \sum_{k^{(\hat{r})}=0}^{l_{\hat{r}}} (-1)^{\sum_{p=1}^{\hat{r}} (k^{(p)}+1)_p-1} \sum_{1 \leq j_1^{(1)} < \dots < j_{k^{(1)}}^{(1)} \leq l_1} \dots \\
 & \dots \sum_{1 \leq j_1^{(p_o)} < \dots < j_{k^{(p_o)}}^{(p_o)} \leq l_{p_o}-1} \dots \sum_{1 \leq j_1^{(\hat{r})} < \dots < j_{k^{(\hat{r})}}^{(\hat{r})} \leq l_{\hat{r}}} \cdot \\
 & \cdot \int_0^{y_{l_{p_o}}^{(p_o)}} G \left(\frac{1}{x_1+t^{(1)}}, \dots, \frac{1}{x_{p_o}+t^{(p_o)}+v_{l_{p_o}}^{(p_o)}}, \dots, \frac{1}{x_{\hat{r}}+t^{(\hat{r})}}, \ell'+(1, \dots, 1)^T \right) \cdot \\
 & \cdot \frac{1}{(l_{p_o}-1)!} \left(x_{p_o}+t^{(p_o)}+v_{l_{p_o}}^{(p_o)} \right)^{l_{p_o}-1} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq p_o}}^{\hat{r}} \frac{1}{l_p!} (x_p+t^{(p)})^{l_p} dv_{l_{p_o}}^{(p_o)} ;
 \end{aligned}$$

darin läßt sich das Integral folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned}
 & y_{l_{p_o}}^{(p_o)} \int_0^{y_{l_{p_o}}^{(p_o)}} \sum_{\gamma > 0} f(\gamma) \left(1 - \frac{|\gamma^{(p_o)}| e_{p_o}}{x_{p_o}+t^{(p_o)}+v_{l_{p_o}}^{(p_o)}} \right)^{l_{p_o}-1} \cdot \\
 & \quad 0 < |\gamma^{(h)}| e_h (x_h+t^{(h)})^{-1} < 1, \quad h \neq p_o \\
 & \quad 0 < |\gamma^{(p_o)}| e_{p_o} \left(x_{p_o}+t^{(p_o)}+v_{l_{p_o}}^{(p_o)} \right)^{-1} < 1 \\
 & \cdot \left\{ \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq p_o}}^{\hat{r}} \left(1 - \frac{|\gamma^{(p)}| e_p}{x_p+t^{(p)}} \right)^{l_p} \right\} \frac{1}{(l_{p_o}-1)!} \left(x_{p_o}+t^{(p_o)}+v_{l_{p_o}}^{(p_o)} \right)^{l_{p_o}-1} .
 \end{aligned}$$

$$\cdot \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq p_0}}^{\hat{r}} \frac{1}{1_p!} (x_p + t^{(p)})^{1_p} dv_{1_{p_0}}^{(p_0)}$$

$$= \int_0^{y_{1_{p_0}}^{(p_0)}} \sum_{\gamma > 0} f(\gamma) \frac{1}{(1_{p_0} - 1)!} \left(x_{p_0} + t^{(p_0)} + v_{1_{p_0}}^{(p_0)} - \right. \\ \left. 0 < |\gamma| e_{h < x_h + t^{(h)}} \right), \quad h \neq p_0 \\ \left. 0 < |\gamma| e_{p_0 < x_{p_0} + t^{(p_0)}} + v_{1_{p_0}}^{(p_0)} - \right. \\ \left. - |\gamma| e_{p_0} \right)^{1_{p_0} - 1} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq p_0}}^{\hat{r}} \frac{1}{1_p!} (x_p + t^{(p)} - |\gamma| e_p)^{1_p} dv_{1_{p_0}}^{(p_0)}$$

$$= \int_{x_{p_0} + t^{(p_0)}}^{x_{p_0} + t^{(p_0)} + y_{1_{p_0}}^{(p_0)}} \sum_{\gamma > 0} f(\gamma) \frac{1}{(1_{p_0} - 1)!} \cdot \\ \left. 0 < |\gamma| e_{h < x_h + t^{(h)}} \right), \quad h \neq p_0 \\ \left. 0 < |\gamma| e_{p_0 < u_{1_{p_0}}^{(p_0)}} \right)$$

$$\cdot \left(u_{1_{p_0}}^{(p_0)} - |\gamma| e_{p_0} \right)^{1_{p_0} - 1} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq p_0}}^{\hat{r}} \frac{1}{1_p!} (x_p + t^{(p)} - |\gamma| e_p)^{1_p} du_{1_{p_0}}^{(p_0)}$$

$$= \left\{ \int_0^{x_{p_0} + t^{(p_0)} + y_{1_{p_0}}^{(p_0)}} - \int_0^{x_{p_0} + t^{(p_0)}} \right\} \sum_{\gamma > 0} f(\gamma) \frac{1}{(1_{p_0} - 1)!} \cdot \\ \left. 0 < |\gamma| e_{h < x_h + t^{(h)}} \right), \quad h \neq p_0 \\ \left. 0 < |\gamma| e_{p_0 < u_{1_{p_0}}^{(p_0)}} \right)$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot \left(u_{1_{p_0}}^{(p_0)} - |_{\gamma}^{(p_0)} | e_{p_0} \right)^{1_{p_0}-1} \frac{\hat{r}}{\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq p_0}} \frac{1}{1_p!} (x_p + t^{(p)} - |_{\gamma}^{(p)} | e_p)^{1_p} du_{1_{p_0}}^{(p_0)} \\
 & = \sum_{\gamma > 0} f(\gamma) \frac{1}{(1_{p_0}-1)!} \left\{ \frac{\hat{r}}{\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq p_0}} \frac{1}{1_p!} (x_p + t^{(p)} - |_{\gamma}^{(p)} | e_p)^{1_p} \right\} \\
 & \quad 0 < |_{\gamma}^{(h)} | e_{h < x_h + t^{(h)}} , \quad h \neq p_0 \\
 & \quad 0 < |_{\gamma}^{(p_0)} | e_{p_0 < x_{p_0} + t^{(p_0)} + y_{1_{p_0}}^{(p_0)}} \\
 & \quad \cdot \int_{|_{\gamma}^{(p_0)} | e_{p_0}}^{x_{p_0} + t^{(p_0)} + y_{1_{p_0}}^{(p_0)}} \left(u_{1_{p_0}}^{(p_0)} - |_{\gamma}^{(p_0)} | e_{p_0} \right)^{1_{p_0}-1} du_{1_{p_0}}^{(p_0)} - \\
 & - \sum_{\gamma > 0} f(\gamma) \frac{1}{(1_{p_0}-1)!} \left\{ \frac{\hat{r}}{\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq p_0}} \frac{1}{1_p!} (x_p + t^{(p)} - |_{\gamma}^{(p)} | e_p)^{1_p} \right\} \\
 & \quad 0 < |_{\gamma}^{(h)} | e_{h < x_h + t^{(h)}} , \quad h \neq p_0 \\
 & \quad 0 < |_{\gamma}^{(p_0)} | e_{p_0 < x_{p_0} + t^{(p_0)}} \\
 & \quad \cdot \int_{|_{\gamma}^{(p_0)} | e_{p_0}}^{x_{p_0} + t^{(p_0)}} \left(u_{1_{p_0}}^{(p_0)} - |_{\gamma}^{(p_0)} | e_{p_0} \right)^{1_{p_0}-1} du_{1_{p_0}}^{(p_0)} \\
 & = \sum_{\gamma > 0} f(\gamma) \frac{1}{1_{p_0}!} \left(x_{p_0} + t^{(p_0)} + y_{1_{p_0}}^{(p_0)} - |_{\gamma}^{(p_0)} | e_{p_0} \right)^{1_{p_0}} . \\
 & \quad 0 < |_{\gamma}^{(h)} | e_{h < x_h + t^{(h)}} , \quad h \neq p_0 \\
 & \quad 0 < |_{\gamma}^{(p_0)} | e_{p_0 < x_{p_0} + t^{(p_0)} + y_{1_{p_0}}^{(p_0)}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq p_0}}^{\hat{r}} \frac{1}{p!} (x_p + t^{(p)} - |\gamma^{(p)}| e_p)^{1_p} - \\
 & - \sum_{\gamma > 0} f(\gamma) \prod_{p=1}^{\hat{r}} \frac{1}{p!} (x_p + t^{(p)} - |\gamma^{(p)}| e_p)^{1_p} \\
 & \quad 0 < |\gamma^{(h)}| e_h < x_h + t^{(h)} \\
 & = G \left(\frac{1}{x_1 + t^{(1)}}, \dots, \frac{1}{x_{p_0} + t^{(p_0)} + y_{1_{p_0}}}, \dots, \frac{1}{x_{\hat{r}} + t^{(\hat{r})}}, \ell + (1, \dots, 1)^T \right) \cdot \\
 & \quad \cdot \frac{1}{1_{p_0}!} \left(x_{p_0} + t^{(p_0)} + y_{1_{p_0}} \right)^{1_{p_0}} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq p_0}}^{\hat{r}} \frac{1}{p!} (x_p + t^{(p)})^{1_p} - \\
 & = G \left(\frac{1}{x_1 + t^{(1)}}, \dots, \frac{1}{x_{p_0} + t^{(p_0)}}, \dots, \frac{1}{x_{\hat{r}} + t^{(\hat{r})}}, \ell + (1, \dots, 1)^T \right) \cdot \\
 & \quad \cdot \prod_{p=1}^{\hat{r}} \frac{1}{p!} (x_p + t^{(p)})^{1_p} ;
 \end{aligned}$$

also gilt:

$$\begin{aligned}
 & y_{1_{\hat{r}}}^{(\hat{r})} y_1^{(\hat{r})} y_{1_1}^{(1)} y_1^{(1)} \\
 & \int_0 \dots \int_0 \dots \int_0 \dots \int_0 G \left(\frac{1}{x_1 + v_1^{(1)} + \dots + v_{1_1}^{(1)}}, \dots, \frac{1}{x_{\hat{r}} + v_1^{(\hat{r})} + \dots + v_{1_{\hat{r}}}^{(\hat{r})}}, \right. \\
 & \quad \left. (1, \dots, 1)^T \right) dv_1^{(1)} \dots dv_{1_1}^{(1)} \dots dv_1^{(\hat{r})} \dots dv_{1_{\hat{r}}}^{(\hat{r})} \\
 & = \sum_{k^{(1)}=0}^{1_1} \dots \sum_{k^{(p_0)}=0}^{1_{p_0}-1} \dots \sum_{k^{(\hat{r})}=0}^{1_{\hat{r}}} (-1)^{\sum_{p=1}^{\hat{r}} (k^{(p)} + 1_p) - 1} \sum_{1 \leq j_1^{(1)} < \dots < j_{k^{(1)}}^{(1)} \leq 1_1} \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \dots \sum_{1 \leq j_1^{(p_0)} < \dots < j_k^{(p_0)} \leq 1_{p_0} - 1} \dots \sum_{1 \leq j_1^{(\hat{p})} < \dots < j_k^{(\hat{p})} \leq 1_{\hat{p}}} \dots \\
 & \cdot \left\{ G \left(\frac{1}{x_1 + y_{j_1^{(1)}}^{(1)} + \dots + y_{j_k^{(1)}}^{(1)}}, \dots, \frac{1}{x_{p_0} + y_{j_1^{(p_0)}}^{(p_0)} + \dots + y_{j_k^{(p_0)}}^{(p_0)} + y_{1_{p_0}}^{(p_0)}}, \dots \right. \right. \\
 & \dots, \frac{1}{x_{\hat{p}} + y_{j_1^{(\hat{p})}}^{(\hat{p})} + \dots + y_{j_k^{(\hat{p})}}^{(\hat{p})}}, \ell + (1, \dots, 1)^T \Big) \frac{1}{1_{p_0}!} \left(x_{p_0} + y_{j_1^{(p_0)}}^{(p_0)} + \dots \right. \\
 & \left. \dots + y_{j_k^{(p_0)}}^{(p_0)} + y_{1_{p_0}}^{(p_0)} \right)^{1_{p_0}} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq p_0}}^{\hat{p}} \frac{1}{1_p!} \left(x_p + y_{j_1^{(p)}}^{(p)} + \dots + y_{j_k^{(p)}}^{(p)} \right)^{1_p} - \\
 & - G \left(\frac{1}{x_1 + y_{j_1^{(1)}}^{(1)} + \dots + y_{j_k^{(1)}}^{(1)}}, \dots, \frac{1}{x_{\hat{p}} + y_{j_1^{(\hat{p})}}^{(\hat{p})} + \dots + y_{j_k^{(\hat{p})}}^{(\hat{p})}}, \ell + (1, \dots, 1)^T \right) : \\
 & \quad \cdot \prod_{p=1}^{\hat{p}} \frac{1}{1_p!} \left(x_p + y_{j_1^{(p)}}^{(p)} + \dots + y_{j_k^{(p)}}^{(p)} \right)^{1_p} \Big\} \\
 & = \sum_{k^{(1)}=0}^{1_1} \dots \sum_{k^{(p_0)}=1}^{1_{p_0}} \dots \sum_{k^{(\hat{p})}=0}^{1_{\hat{p}}} (-1)^{\sum_{p=1}^{\hat{p}} (k^{(p)} + 1_p)} \sum_{1 \leq j_1^{(1)} < \dots < j_k^{(1)} \leq 1_1} \dots \\
 & \dots \sum_{1 \leq j_1^{(p_0)} < \dots < j_k^{(p_0)} = 1_{p_0}} \dots \sum_{1 \leq j_1^{(\hat{p})} < \dots < j_k^{(\hat{p})} \leq 1_{\hat{p}}} \dots \\
 & \cdot G \left(\frac{1}{x_1 + y_{j_1^{(1)}}^{(1)} + \dots + y_{j_k^{(1)}}^{(1)}}, \dots, \frac{1}{x_{\hat{p}} + y_{j_1^{(\hat{p})}}^{(\hat{p})} + \dots + y_{j_k^{(\hat{p})}}^{(\hat{p})}}, \ell + (1, \dots, 1)^T \right) \cdot
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot \prod_{p=1}^{\hat{r}} \frac{1}{1^p!} \left(x_p^{y_{j_1^{(p)}}^{(p)}} + \dots + y_{j_{k^{(p)}}^{(p)}}^{(p)} \right)^{1_p} + \\
 & + \sum_{k^{(1)}=0}^{1_1} \dots \sum_{k^{(p_0)}=0}^{1_{p_0}-1} \dots \sum_{k^{(\hat{r})}=0}^{1_{\hat{r}}} (-1)^{\sum_{p=1}^{\hat{r}} (k^{(p)} + 1_p)} \sum_{1 \leq j_1^{(1)} < \dots < j_{k^{(1)}}^{(1)} \leq 1_1} \dots \\
 & \dots \sum_{1 \leq j_1^{(p_0)} < \dots < j_{k^{(p_0)}}^{(p_0)} \leq 1_{p_0}-1} \dots \sum_{1 \leq j_1^{(\hat{r})} < \dots < j_{k^{(\hat{r})}}^{(\hat{r})} \leq 1_{\hat{r}}} \cdot \\
 & \cdot G \left(\frac{1}{x_1^{y_{j_1^{(1)}}^{(1)}} + \dots + y_{j_{k^{(1)}}^{(1)}}^{(1)}}, \dots, \frac{1}{x_{\hat{r}}^{y_{j_1^{(\hat{r})}}^{(\hat{r})}} + \dots + y_{j_{k^{(\hat{r})}}^{(\hat{r})}}^{(\hat{r})}}, \ell + (1, \dots, 1)^T \right) \cdot \\
 & \cdot \prod_{p=1}^{\hat{r}} \frac{1}{1^p!} \left(x_p^{y_{j_1^{(p)}}^{(p)}} + \dots + y_{j_{k^{(p)}}^{(p)}}^{(p)} \right)^{1_p} \\
 & = \sum_{k^{(1)}=0}^{1_1} \dots \sum_{k^{(\hat{r})}=0}^{1_{\hat{r}}} (-1)^{\sum_{p=1}^{\hat{r}} (k^{(p)} + 1_p)} \sum_{1 \leq j_1^{(1)} < \dots < j_{k^{(1)}}^{(1)} \leq 1_1} \dots \\
 & \dots \sum_{1 \leq j_1^{(\hat{r})} < \dots < j_{k^{(\hat{r})}}^{(\hat{r})} \leq 1_{\hat{r}}} G \left(\frac{1}{x_1^{y_{j_1^{(1)}}^{(1)}} + \dots + y_{j_{k^{(1)}}^{(1)}}^{(1)}}, \dots \right. \\
 & \left. \dots, \frac{1}{x_{\hat{r}}^{y_{j_1^{(\hat{r})}}^{(\hat{r})}} + \dots + y_{j_{k^{(\hat{r})}}^{(\hat{r})}}^{(\hat{r})}}, \ell + (1, \dots, 1)^T \right) \cdot \\
 & \cdot \prod_{p=1}^{\hat{r}} \frac{1}{1^p!} \left(x_p^{y_{j_1^{(p)}}^{(p)}} + \dots + y_{j_{k^{(p)}}^{(p)}}^{(p)} \right)^{1_p} .
 \end{aligned}$$

Damit ist Hilfssatz 1 bewiesen.

Da für natürliche Zahlen l und für $\sigma > 0$

$$B(l, s) = \frac{\Gamma(l)\Gamma(s)}{\Gamma(l+s)} = \frac{(l-1)!}{s(s+1)\cdots(s+l-1)}$$

ist, ergibt sich aus Satz 1 und Hilfssatz 1 für $\sigma > c+1$, $\hat{p} \geq 2$, natürliche Zahlen $l_1, \dots, l_{\hat{p}} \geq 2$ und $y_1^{(1)}, \dots, y_{l_1-1}^{(1)}, \dots, y_1^{(\hat{p})}, \dots, y_{l_{\hat{p}}-1}^{(\hat{p})} > 0$

$$\begin{aligned} & \int_0^{y_{l_{\hat{p}}-1}^{(\hat{p})}} \cdots \int_0^{y_1^{(\hat{p})}} \cdots \int_0^{y_{l_1-1}^{(1)}} \cdots \int_0^{y_1^{(1)}} G\left(\frac{1}{x_1 + v_1^{(1)} + \dots + v_{l_1-1}^{(1)}}, \dots \right. \\ & \left. \dots, \frac{1}{x_{\hat{p}} + v_1^{(\hat{p})} + \dots + v_{l_{\hat{p}}-1}^{(\hat{p})}}, (1, \dots, 1)^T\right) dv_1^{(1)} \cdots dv_{l_1-1}^{(1)} \cdots dv_1^{(\hat{p})} \cdots dv_{l_{\hat{p}}-1}^{(\hat{p})} \\ & = \sum_{k^{(1)}=0}^{l_1-1} \cdots \sum_{k^{(\hat{p})}=0}^{l_{\hat{p}}-1} (-1)^{\sum_{p=1}^{\hat{p}} (k^{(p)} + l_p - 1)} \sum_{1 \leq j_1^{(1)} < \dots < j_{k^{(1)}}^{(1)} \leq l_1-1} \cdots \\ & \cdots \sum_{1 \leq j_1^{(\hat{p})} < \dots < j_{k^{(\hat{p})}}^{(\hat{p})} \leq l_{\hat{p}}-1} \frac{w_0}{2\pi i R} \sum_{m_1, \dots, m_r = -\infty}^{\infty} \cdot \\ & \cdot \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \phi_{\mathcal{M}}(s) \left\{ \prod_{p=1}^{\hat{p}} \frac{\left(x_p + y_{j_1^{(p)}}^{(p)} + \dots + y_{j_{k^{(p)}}^{(p)}}^{(p)}\right)^{s - iE_p(\mathcal{M})} (l_p - 1)!}{(s - iE_p(\mathcal{M}))(s+1 - iE_p(\mathcal{M})) \cdots (s+l_p-1 - iE_p(\mathcal{M}))} \right\} \cdot \\ & \cdot \left\{ \prod_{p=1}^{\hat{p}} \frac{1}{(l_p - 1)!} \left(x_p + y_{j_1^{(p)}}^{(p)} + \dots + y_{j_{k^{(p)}}^{(p)}}^{(p)}\right)^{l_p - 1} \right\} ds \\ & = \frac{w_0}{2\pi i R} \sum_{k^{(1)}=0}^{l_1-1} \cdots \sum_{k^{(\hat{p})}=0}^{l_{\hat{p}}-1} (-1)^{\sum_{p=1}^{\hat{p}} (k^{(p)} + l_p - 1)} \sum_{1 \leq j_1^{(1)} < \dots < j_{k^{(1)}}^{(1)} \leq l_1-1} \cdots \end{aligned}$$

$$\dots \sum_{1 \leq j_1^{(\hat{r})} < \dots < j_k^{(\hat{r})} \leq l_{\hat{r}} - 1} \sum_{m_1, \dots, m_r = -\infty}^{\infty} \cdot$$

$$\cdot \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \phi_{\mathfrak{M}}(s) \prod_{p=1}^{\hat{r}} \frac{\left(x_p^{(p)} + y_{j_1^{(p)}}^{(p)} + \dots + y_{j_k^{(p)}}^{(p)} \right)^{s + l_p - 1 - iE_p(\mathfrak{M})}}{(s - iE_p(\mathfrak{M}))(s + 1 - iE_p(\mathfrak{M})) \dots (s + l_p - 1 + iE_p(\mathfrak{M}))} ds.$$

Es gilt also die folgende Summenformel:

Satz 2: Unter den Voraussetzungen von Satz 1 ist mit

$$F(x_1, \dots, x_{\hat{r}}) := G\left(\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_{\hat{r}}}, (1, \dots, 1)^T\right) = \sum_{\gamma \succ 0} f(\gamma)$$

$$0 < |\gamma^{(h)}| e_{h, x_h}$$

für $\sigma > c + 1$, natürliche Zahlen $l_1, \dots, l_{\hat{r}} \geq 2$ und $y_1^{(1)}, \dots, y_{l_1 - 1}^{(1)}, \dots$
 $\dots, y_1^{(\hat{r})}, \dots, y_{l_{\hat{r}} - 1}^{(\hat{r})} > 0$

$$y_{l_{\hat{r}} - 1}^{(\hat{r})} \int_0^{y_1^{(\hat{r})}} \dots \int_0^{y_1^{(1)}} \dots \int_0^{y_{l_1 - 1}^{(1)}} \dots \int_0^{y_1^{(1)}} F(x_1 + v_1^{(1)} + \dots + v_{l_1 - 1}^{(1)}, \dots$$

$$\dots, x_{\hat{r}} + v_1^{(\hat{r})} + \dots + v_{l_{\hat{r}} - 1}^{(\hat{r})}) dv_1^{(1)} \dots dv_{l_1 - 1}^{(1)} \dots dv_1^{(\hat{r})} \dots dv_{l_{\hat{r}} - 1}^{(\hat{r})}$$

$$= \frac{w_0}{2\pi i R} \sum_{k^{(1)}=0}^{l_1 - 1} \dots \sum_{k^{(\hat{r})}=0}^{l_{\hat{r}} - 1} (-1)^{\sum_{p=1}^{\hat{r}} (k^{(p)} + l_p - 1)} \sum_{1 \leq j_1^{(1)} < \dots < j_k^{(1)} \leq l_1 - 1} \dots$$

$$\dots \sum_{1 \leq j_1^{(\hat{r})} < \dots < j_k^{(\hat{r})} \leq l_{\hat{r}} - 1} \sum_{m_1, \dots, m_r = -\infty}^{\infty} \cdot$$

$$\cdot \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \phi_{\mathcal{M}}(s) \prod_{p=1}^{\hat{r}} \frac{(x_p + y_{j_1^{(p)}}^{(p)} + \dots + y_{j_k^{(p)}}^{(p)})^{s+1-iE_p(\mathcal{M})}}{(s-iE_p(\mathcal{M}))(s+1-iE_p(\mathcal{M})) \dots (s+1-iE_p(\mathcal{M}))} ds.$$

Speziell für $l_1 = \dots = l_{\hat{r}} = 2$ erhält man hieraus:

Korollar 1: Unter den Voraussetzungen von Satz 1 ist für $\sigma > c+1$ und $y^{(1)}, \dots, y^{(\hat{r})} > 0$

$$\int_0^{y^{(\hat{r})}} \dots \int_0^{y^{(1)}} F(x_1 + v^{(1)}, \dots, x_{\hat{r}} + v^{(\hat{r})}) dv^{(1)} \dots dv^{(\hat{r})} = \frac{w_0}{2\pi i R}.$$

$$\cdot \sum_{m_1, \dots, m_r = -\infty}^{\infty} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \phi_{\mathcal{M}}(s) \prod_{p=1}^{\hat{r}} \frac{(x_p + y^{(p)})^{s+1-iE_p(\mathcal{M})} x_p^{-s+1-iE_p(\mathcal{M})}}{(s-iE_p(\mathcal{M}))(s+1-iE_p(\mathcal{M}))} ds.$$

Bemerkung: Satz 1 und der als Korollar formulierte Spezialfall von Satz 2 wurden von Siegel für reell-quadratische und von Schaal für total reelle Zahlkörper bewiesen (vgl. [6], Sätze 1 und 2 bzw. [5], Lemma 2 und Gleichung (4)). Die in diesem § dargestellten Beweise verlaufen analog zu den an den zitierten Stellen angegebenen.

§3 Hilfssätze

Um die Herleitung der asymptotischen Beziehungen in den §§ 4 und 5 möglichst übersichtlich darstellen zu können, werden in diesem § einige Zwischenergebnisse in Form von Hilfssätzen zusammengestellt.

Sei $\mathbb{Z}$ ein Bereich idealer Zahlen zu K (vgl. [2], §2). Dann läßt sich jedem Ideal α von K ein von einer idealen Zahl $\hat{\alpha} \in \mathbb{Z}$ erzeugtes Hauptideal $(\hat{\alpha})$ in eindeutiger Weise zuordnen. Durch diese Zuordnung überträgt sich unmittelbar die Klasseneinteilung der Ideale von K auf die von den idealen Zahlen erzeugten Hauptideale. Die so entstehende Gruppe der Klassen von Hauptidealen aus $\mathbb{Z}$ werde mit $\hat{K}$ bezeichnet. Sei ferner noch (δ) das der Differenten $\mathfrak{D}$ von K zugeordnete Hauptideal.

Es sei nun

$$\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r \quad (5)$$

ein System von Grundeinheiten von K .

Für die folgenden Betrachtungen werde zunächst $r_1 \geq 1$ vorausgesetzt.

Als "elementare Transformationen" eines Systems von Grundeinheiten werden folgende Transformationen bezeichnet:

- 1.) Umnummerierung der Grundeinheiten;
- 2.) Ersetzen einer Grundeinheit durch ihr Reziprokes;
- 3.) Ersetzen einer Grundeinheit durch das Produkt aus dieser und einer anderen Grundeinheit;
- 4.) Multiplikation einer Grundeinheit mit (-1) ;
- 5.) Gleichzeitige Umnummerierung der reellen Konjugierten aller Grundeinheiten.

Durch eine elementare Transformation geht ein System von Grundeinheiten offenbar wieder in ein System von Grundeinheiten über.

Hilfssatz 2: Durch endlich viele elementare Transformationen läßt sich das System (5) in ein solches System $\epsilon_1^*, \dots, \epsilon_r^*$ überführen, bei dem die Matrix

$$\gamma(\epsilon_1^*, \dots, \epsilon_r^*) := (\text{sign } \epsilon_h^{*(p)}) \quad , \quad p=1, \dots, r_1 \quad , \quad h=1, \dots, r \quad ,$$

(p Zeilenindex, h Spaltenindex) die folgenden Gestalt hat:

$$\gamma(\epsilon_1^*, \dots, \epsilon_r^*) = \begin{pmatrix} -1 & & & & +1 & \dots & +1 \\ & \cdot & & & \vdots & & \vdots \\ & & \cdot & +1 & \vdots & & \vdots \\ & & & \cdot & \vdots & & \vdots \\ +1 & & & \cdot & \vdots & & \vdots \\ & & & & -1 & \vdots & \vdots \\ * & \dots & & * & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & \dots & & * & +1 & \dots & +1 \end{pmatrix} \quad \leftarrow Q\text{-te Zeile} \quad ; \quad (6)$$

↑
Q-te Spalte

dabei gilt für die Anzahl Q der nicht total positiven Grundeinheiten

$$0 \leq Q \leq r_1 - 1 \quad . \quad (7)$$

Die Zahl Q ist von der speziellen Wahl des Systems (5) unabhängig, und es gilt

$$\sum_{h=1}^Q 1 \equiv 0 \pmod{2} \quad . \quad (8)$$

$$\text{sign } \epsilon_h^{*(Q+1)} = -1$$

Beweis: Die Matrix

$$\gamma(\epsilon_1, \dots, \epsilon_r) = (\text{sign } \epsilon_h^{(p)}) \quad , \quad p=1, \dots, r_1 \quad , \quad h=1, \dots, r \quad ,$$

ist eine Matrix über dem zweielementigen Körper (in multiplikativer Schreibweise). Sie läßt sich somit durch endlich viele elementare Spaltenoperationen auf Spaltennormalgestalt bringen; eine elementare Spaltenoperation der Matrix γ wird jedoch durch

eine elementare Transformation der Form 1.) bzw. 3.) des jeweils zugrunde liegenden Einheitensystems bewirkt. Ferner läßt sich die so entstandene Matrix durch endlich viele Zeilenvertauschungen, die durch elementare Transformationen der Form 5.) bewirkt werden, auf die Form (6) bringen. Das dieser Matrix zugrunde liegende Einheitensystem werde mit $\epsilon_1^*, \dots, \epsilon_{r_1-1}^*, \epsilon_{r_1}^{**}, \epsilon_{r_1+1}^*, \dots, \epsilon_r^*$ bezeichnet. Ist nun $\text{sign } \epsilon_{r_1}^{**} = -1$, so ist die Einheit $\epsilon_{r_1}^{**}$ durch

$$\epsilon_{r_1}^* := (-1) \epsilon_1^* \dots \epsilon_{r_1-1}^* \epsilon_{r_1}^{**}$$

zu ersetzen (endlich viele elementare Transformationen der Form 3.) und 4.)), ansonsten bleibt sie unverändert: $\epsilon_{r_1}^* := \epsilon_{r_1}^{**}$. Für das System $\epsilon_1^*, \dots, \epsilon_r^*$ ist dann offenbar auch (7) erfüllt.

Um die Unabhängigkeit der Zahl Q von der speziellen Wahl des Systems (5) nachzuweisen, wird gezeigt, daß der Übergang von einem Grundeinheitensystem von K zu einem anderen durch endlich viele elementare Transformationen durchgeführt werden kann. (Eine Transformation der Form 2.) verändert die Matrix δ nicht.)

Seien nun - bei festgehaltener Numerierung der reellen Konjugierten - $\epsilon_1', \dots, \epsilon_r'$ und $\epsilon_1'', \dots, \epsilon_r''$ zwei beliebige Grundeinheitensysteme von K . Wegen der Basiseigenschaft von $(-1), \epsilon_1, \dots, \epsilon_r$ gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $\alpha_h', \alpha_h'' \in \{0, 1\}$, $h=1, \dots, r$, und $\beta_{1,h}', \beta_{1,h}'', \beta_{1,h} \in \mathbb{Z}$, $1, h=1, \dots, r$, mit

$$\begin{aligned} \epsilon_h' &= (-1)^{\alpha_h'} \epsilon_1^{\beta_{1,h}'} \dots \epsilon_r^{\beta_{r,h}'} \\ \epsilon_h'' &= (-1)^{\alpha_h''} \epsilon_1^{\beta_{1,h}''} \dots \epsilon_r^{\beta_{r,h}''} \end{aligned} \quad , \quad h = 1, \dots, r \quad (9)$$

Definiert man die "Exponentenmatrix von $\epsilon_1', \dots, \epsilon_r'$ bzgl. $\epsilon_1, \dots, \epsilon_r$ " durch

$$H' := (\beta'_{1,h}) \quad , \quad 1, h = 1, \dots, r \quad ,$$

(1 Zeilenindex, h Spaltenindex) und entsprechend die Matrix H'' , so gibt es eine unimodulare Matrix U mit

$$H'' = H'U \quad .$$

Eine unimodulare Matrix ist aber das Produkt endlich vieler Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

(in der linken Matrix kann eine (-1) an beliebiger Stelle der Hauptdiagonalen, in der rechten eine 1 an beliebiger Stelle außerhalb der Hauptdiagonalen stehen; die Leerräume sind durch Nullen auszufüllen).

Eine rechtsseitige Multiplikation einer Exponentenmatrix mit einer Matrix dieser Gestalt wird jedoch durch eine elementare Transformation der Form 2.) bzw. 3.) bewirkt. Unter Berücksichtigung von (9) und der Transformationen der Form 4.) und 5.) ersieht man hieraus, daß der Übergang von einem Grundeinheiten-system zu einem anderen, wobei jetzt auch wieder die Umnummerierung der reellen Konjugierten zugelassen wird, durch endlich viele elementare Transformationen erfolgt. Also gilt:

$$Q = \min \{z \mid z \text{ ist die Anzahl der nicht total positiven Grundeinheiten eines Systems von Grundeinheiten von } K\}$$

Zum Nachweis der Beziehung (8) für das System $\epsilon_1^*, \dots, \epsilon_r^*$ genügt es wegen der Transformationen der Form 5.) zu zeigen, daß es ein p mit $Q+1 \leq p \leq r_1$ gibt, so daß gilt:

$$\sum_{h=1}^Q 1 \equiv 0 \pmod{2} .$$

$$\text{sign } \epsilon_h^{*(p)} = -1$$

Wäre dies nicht der Fall, so gälte für $p=1, \dots, r_1$

$$\text{sign } \epsilon_1^{*(p)} \dots \epsilon_Q^{*(p)} = -1 ,$$

und $\epsilon_1^*, \dots, \epsilon_{Q-1}^*, \epsilon_Q^{**}, \epsilon_{Q+1}^*, \dots, \epsilon_r^*$ mit $\epsilon_Q^{**} := -\epsilon_1^* \dots \epsilon_Q^*$ wäre ein Grundeinheitensystem mit nur $(Q-1)$ nicht total positiven Grundeinheiten; dies stünde im Widerspruch zur Minimalität von Q .

Es gibt somit in K ein System von Grundeinheiten $\epsilon_1^*, \dots, \epsilon_r^*$, bei dem - gegebenenfalls nach geeigneter Umnummerierung der reellen konjugierten Körper von K - die Matrix $\delta(\epsilon_1^*, \dots, \epsilon_r^*)$ die in Hilfssatz 2 angegebene Gestalt hat. Also kann im Folgenden o.B.d.A. angenommen werden, daß das System (5) bereits diese Eigenschaften hat.

Von dieser Stelle an kann der Fall $r_1=0$ wieder bequem mitbehandelt werden, wenn man in diesem Fall $Q:=-1$ setzt.

Die total positiven Einheiten $\eta_1, \dots, \eta_r$ seien jetzt definiert durch

$$\eta_h := \begin{cases} \epsilon_h^2, & \text{falls } h \leq Q ; \\ \epsilon_h, & \text{falls } h > Q . \end{cases} \quad (10)$$

Ferner sei für alle von 0 verschiedenen idealen Zahlen $\hat{a}$

$$\mathfrak{g}(\hat{a}) := \begin{pmatrix} \log |\hat{a}^{(1)}| \\ \vdots \\ \log |\hat{a}^{(\hat{r})}| \end{pmatrix} .$$

Die Zahlen e_p , $e_p^{(q)}$ und $E_p(\mathfrak{m})$ seien definiert wie in §2, jedoch unter Verwendung der speziellen total positiven Einheiten $\eta_1, \dots, \eta_r$ aus (10).

Für alle Vektoren

$$\mathfrak{m} := 2\pi i \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_r \end{pmatrix}, \quad m_1, \dots, m_r \text{ ganz rational} \quad (11)$$

und für alle

$$\mathfrak{A} := \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{\hat{r}} \end{pmatrix}, \quad t_1, \dots, t_{r_1} \in \{0, 1\}, \quad t_{r_1+1} = \dots = t_{\hat{r}} = 0, \quad (12a)$$

die den Bedingungen

$$t_h + \sum_{p=Q+1}^{r_1} t_p \equiv m_h \pmod{2}, \quad h = 1, \dots, Q, \quad (12b)$$

$$\text{sign } \varepsilon_h^{(p)} = -1$$

$$\sum_{p=1}^{r_1} t_p \equiv 0 \pmod{2} \quad (12c)$$

genügen, seien auf der Menge der von (0) verschiedenen Hauptideale von Z die Größencharaktere $\lambda_{\mathfrak{m}}((\hat{a}), \mathfrak{A})$ definiert durch

$$\lambda_{\mathfrak{m}}((\hat{a}), \mathfrak{A}) := \exp\{\mathfrak{m}^T \text{Eg}(\hat{a})\} \prod_{p=1}^{r_1} \left(\frac{\hat{a}^{(p)}}{|\hat{a}^{(p)}|} \right)^{t_p}.$$

Um nachzuweisen, daß der rechts stehende Ausdruck von der speziellen Wahl der Assoziierten von $\hat{a}$ unabhängig ist, genügt es wegen der Multiplikativität dieses Ausdrucks, zu zeigen:

$$\exp\{\mathfrak{m}^T \text{Eg}(\varepsilon_h)\} \prod_{p=1}^{r_1} \left(\frac{\varepsilon_h^{(p)}}{|\varepsilon_h^{(p)}|} \right)^{t_p} = 1, \quad h = 1, \dots, r,$$

$$\exp\{m^T E g(\zeta^*)\} \prod_{p=1}^{r_1} \left(\frac{\zeta^{*(p)}}{|\zeta^{*(p)}|} \right)^{t_p} = 1 ,$$

wobei ζ^* eine Erzeugende der Gruppe der Einheitswurzeln von K bezeichnet. Unter Berücksichtigung von (6) gilt nun nach (12b) im Falle $h \leq Q$

$$\begin{aligned} & \exp\{m^T E g(\epsilon_h)\} \prod_{p=1}^{r_1} \left(\frac{\epsilon_h^{(p)}}{|\epsilon_h^{(p)}|} \right)^{t_p} \\ &= \exp \left\{ 2\pi i \sum_{q=1}^r m_q \sum_{p=1}^{\hat{r}} e_p^{(q)} \log |\epsilon_h^{(p)}| \right\} (-1)^{t_h} \prod_{p=Q+1}^{r_1} (-1)^{t_p} \text{sign } \epsilon_h^{(p)} = -1 \\ &= \exp \left\{ \pi i \sum_{q=1}^r m_q \sum_{p=1}^{\hat{r}} e_p^{(q)} \log |n_h^{(p)}| \right\} (-1)^{t_h} \prod_{p=Q+1}^{r_1} (-1)^{t_p} \text{sign } \epsilon_h^{(p)} = -1 \\ &= \exp \left\{ \pi i \sum_{q=1}^r m_q \delta_{h,q} \right\} (-1)^{t_h} \prod_{p=Q+1}^{r_1} (-1)^{t_p} \text{sign } \epsilon_h^{(p)} = -1 \\ & \quad t_h + \sum_{p=Q+1}^{r_1} t_p \\ &= e^{\pi i m_h} (-1)^{\text{sign } \epsilon_h^{(p)} = -1} = 1 \end{aligned}$$

und im Falle $h > Q$

$$\begin{aligned} & \exp\{m^T E g(\epsilon_h)\} \prod_{p=1}^{r_1} \left(\frac{\epsilon_h^{(p)}}{|\epsilon_h^{(p)}|} \right)^{t_p} = \exp \left\{ 2\pi i \sum_{q=1}^r m_q \sum_{p=1}^{\hat{r}} e_p^{(q)} \log |\epsilon_h^{(p)}| \right\} \\ &= \exp \left\{ 2\pi i \sum_{q=1}^r m_q \sum_{p=1}^{\hat{r}} e_p^{(q)} \log |n_h^{(p)}| \right\} = \exp \left\{ 2\pi i \sum_{q=1}^r m_q \delta_{h,q} \right\} \end{aligned}$$

$$= e^{2\pi i m_h} = 1 \quad ;$$

weiterhin ist für $r_1=0$

$$\exp\{\mathfrak{m}^T E q(\zeta^*)\} = \exp\left\{2\pi i \sum_{q=1}^r m_q \sum_{p=1}^{\hat{r}} e_p^{(q)} \log|\zeta^{*(p)}|\right\} = e^0 = 1$$

und für $r_1 > 0$ wegen $\zeta^* = -1$ nach (12c)

$$\exp\{\mathfrak{m}^T E q(\zeta^*)\} \prod_{p=1}^{r_1} \left(\frac{\zeta^{*(p)}}{\zeta^{*(p)}} \right)^{t_p} = e^0 (-1)^{\sum_{p=1}^{r_1} t_p} = 1 \quad .$$

Bemerkung: Im Falle $r_1 \geq 1$ ist wegen (8) zu vorgegebenen Zahlen $m_1, \dots, m_r, t_{Q+2}, \dots, t_{r_1}$ das Kongruenzensystem (12b), (12c) in $t_1, \dots, t_{Q+1}$ eindeutig lösbar.

Hilfssatz 3: Sei $g(\gamma)$ eine auf der Menge der ganzen Zahlen von K erklärte Funktion mit den Eigenschaften:

$$g(\epsilon\gamma) = g(\gamma) \quad \text{für jede Einheit } \epsilon \text{ von } K ,$$

$$\sum_{(\gamma) \neq (0)} g(\gamma) \quad \text{konvergiert absolut .}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} & \sum_{\gamma}^{\prime} g(\gamma) \exp\{\mathfrak{m}^T E q(\gamma)\} \\ &= \frac{1}{2^{r_1-Q-1}} \sum_{t_{Q+2}, \dots, t_{r_1}=0,1} \sum_{(\gamma) \neq (0)} g(\gamma) \lambda_{\mathfrak{m}}((\gamma), 4) \quad ; \end{aligned}$$

dabei soll sich die durch den Strich am Summenzeichen ausgedrückte Summationsvorschrift hier und im Folgenden stets auf die von ζ_0^* und den Einheiten $\eta_1, \dots, \eta_r$ aus (10) erzeugte Einheitengruppe beziehen; im Falle $Q=r_1-1$ ist mit der rechten Seite

hier und entsprechend im Folgenden die Reihe

$$\sum_{(\gamma) \neq (0)} g(\gamma) \lambda_{\mathfrak{m}}((\gamma), \mathfrak{f})$$

gemeint.

Beweis: Die Behauptung ist für $r_1=0$ trivial; sei also $r_1 \geq 1$ vorausgesetzt. Wie aus (6) zu ersehen ist, besitzt dann jedes von (0) verschiedene Hauptideal eine Erzeugende, deren erste $(Q+1)$ Konjugierte positiv sind; daher gilt:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2^{r_1-Q-1}} t_{Q+2}, \dots, t_{r_1} = 0, 1 \sum_{(\gamma) \neq (0)} g(\gamma) \lambda_{\mathfrak{m}}((\gamma), \mathfrak{f}) \\ &= \frac{1}{2^{r_1-Q-1}} \sum_{(\gamma) \neq (0)} g(\gamma) \exp\{\mathfrak{m}^T E \mathfrak{q}(\gamma)\} t_{Q+2}, \dots, t_{r_1} = 0, 1 \cdot \\ & \quad \cdot \prod_{p=1}^{r_1} \left(\frac{\gamma^{(p)}}{|\gamma^{(p)}|} \right)^{t_p} \\ &= \frac{1}{2^{r_1-Q-1}} \sum_{(\gamma) \neq (0)} g(\gamma) \exp\{\mathfrak{m}^T E \mathfrak{q}(\gamma)\} \prod_{p=Q+2}^{r_1} \left(1 + \frac{\gamma^{(p)}}{|\gamma^{(p)}|} \right) \\ &= \sum_{\gamma} g(\gamma) \exp\{\mathfrak{m}^T E \mathfrak{q}(\gamma)\} \end{aligned}$$

Für $\mathfrak{m}$ gemäß (11), $\mathfrak{f}$ gemäß (12), $\hat{\mathfrak{a}} \in \hat{\mathfrak{f}}$ und $\sigma > 1$ werde jetzt

$$\zeta_{\mathfrak{m}}(s, \hat{\mathfrak{a}}, \mathfrak{f}) := \sum_{(\hat{\mathfrak{a}}) \in \hat{\mathfrak{f}}} \frac{\lambda_{\mathfrak{m}}((\hat{\mathfrak{a}}), \mathfrak{f})}{N(\hat{\mathfrak{a}})^s}$$

gesetzt, wobei über alle von ganzen idealen Zahlen erzeugten Hauptideale $(\hat{\mathfrak{a}}) \neq (0)$ aus der Klasse $\hat{\mathfrak{f}}$ zu summieren ist und $N(\hat{\mathfrak{a}})$ die Norm des Hauptideals $(\hat{\mathfrak{a}})$ bezeichnet.

Mit den Bezeichnungen

$$A := \sqrt{\frac{|d|}{\pi^n}} \cdot 2^{-r_2}, \quad \gamma_m := \prod_{p=1}^{\hat{r}} |\sqrt{e_p}|^{2\pi i \sum_{q=1}^r m_q e_p^{(q)}},$$

$$\Gamma_m(s, \mathfrak{A}) := \prod_{p=1}^{\hat{r}} \Gamma\left(\frac{e_p}{2}(s + t_p - iE_p(m))\right),$$

$$\xi_m(s, \hat{\mathfrak{A}}, \mathfrak{A}) := \Gamma_m(s, \mathfrak{A}) \gamma_m A^S \zeta_m(s, \hat{\mathfrak{A}}, \mathfrak{A}) \quad (13)$$

gilt dann nach Hecke der folgende Hilfssatz:

Hilfssatz 4: Für m gemäß (11), $\mathfrak{A}$ gemäß (12) und $\hat{\mathfrak{A}} \cdot \hat{\mathfrak{B}}$ gilt:

a) $\xi_m(s, \hat{\mathfrak{A}}, \mathfrak{A})$ ist eine ganze transzendente Funktion, falls $|m|^2 + |\mathfrak{A}|^2 > 0$ ist; die Funktion $\xi_{\sigma}(s, \hat{\mathfrak{A}}, \sigma)$ ist überall regulär mit Ausnahme der Punkte $s=0$ und $s=1$; dort liegen einfache Pole vor mit den Residuen $-2^{r_1}R_0/w$ bzw. $2^{r_1}R_0/w$, worin R_0 den Regulator des Körpers K und w die Anzahl der Einheitswurzeln in K bezeichnet.

b) $\xi_m(s, \hat{\mathfrak{A}}, \mathfrak{A})$ genügt der Funktionalgleichung

$$\xi_m(s, \hat{\mathfrak{A}}, \mathfrak{A}) = W_m(\mathfrak{A}) \xi_{-m}(1-s, \hat{\mathfrak{A}}', \mathfrak{A}),$$

wobei

$$W_m(\mathfrak{A}) := (-i)^{\sum_{p=1}^{r_1} t_p} \lambda_m((\hat{\mathfrak{B}}), \mathfrak{A})$$

und $\hat{\mathfrak{A}}'$ dadurch definiert ist, daß $\hat{\mathfrak{A}} \cdot \hat{\mathfrak{A}}'$ die Klasse von $(\hat{\mathfrak{B}})$ ist.

Beweis: siehe [2], §6 und [1], §4.

Hieraus erhält man unmittelbar:

Hilfssatz 5: Für m gemäß (11), ℓ gemäß (12) und $\hat{\mathfrak{d}}, \hat{\mathfrak{f}}$ gilt:

- a) $\zeta_m(s, \hat{\mathfrak{d}}, \ell)$ ist eine ganze transzendente Funktion, falls $|m|^2 + |\ell|^2 > 0$ ist; die Funktion $\zeta_{\sigma}(s, \hat{\mathfrak{d}}, \nu)$ ist überall regulär mit Ausnahme des Punktes $s=1$; dort liegt ein einfacher Pol vor mit dem Residuum $2^{r_1}(2\pi)^{r_2} R_0 / w |\sqrt{d}|$.
- b) $\zeta_m(s, \hat{\mathfrak{d}}, \ell)$ genügt der Funktionalgleichung

$$\zeta_m(s, \hat{\mathfrak{d}}, \ell) = W_m(\ell) \gamma_{-2m} A^{1-2s} \frac{\Gamma_{-m}(1-s, \ell)}{\Gamma_m(s, \ell)} \zeta_{-m}(1-s, \hat{\mathfrak{d}}', \ell) .$$

Beweis: a) Mit (13) folgt die erste Teilaussage von a) unmittelbar aus der entsprechenden Aussage von Hilfssatz 4a), da die Funktion $(\Gamma_m(s, \ell) A^s)^{-1}$ überall regulär ist. Die Funktion

$$\zeta_{\sigma}(s, \hat{\mathfrak{d}}, \nu) = \frac{\xi_{\sigma}(s, \hat{\mathfrak{d}}, \nu)}{\Gamma_{\sigma}(s, \nu) \gamma_{\sigma} A^s} = \frac{\xi_{\sigma}(s, \hat{\mathfrak{d}}, \nu)}{\Gamma^{r_1}(\frac{1}{2}s) \Gamma^{r_2}(s) (\sqrt{|d|} / \pi^{\bar{n}})^{-r_2} s}$$

ist nach Hilfssatz 4a) wiederum wegen der Regularität von $(\Gamma_{\sigma}(s, \nu) A^s)^{-1}$ überall regulär mit Ausnahme höchstens der Punkte $s=0$ und $s=1$. Der einfache Pol von $\xi_{\sigma}(s, \hat{\mathfrak{d}}, \nu)$ im Punkte $s=0$ wird durch die (r_1+r_2) -fache Nullstelle von $(\Gamma^{r_1}(s/2) \Gamma^{r_2}(s))^{-1}$ kompensiert. Im Punkte $s=1$ liegt jedoch ein einfacher Pol vor mit dem Residuum $2^{r_1}(2\pi)^{r_2} R_0 / w |\sqrt{d}|$.

b) Aus Hilfssatz 4b) folgt mit (13)

$$\begin{aligned} \zeta_m(s, \hat{\mathfrak{d}}, \ell) &= W_m(\ell) \frac{\Gamma_{-m}(1-s, \ell) \gamma_{-m} A^{1-s}}{\Gamma_m(s, \ell) \gamma_m A^s} \zeta_{-m}(1-s, \hat{\mathfrak{d}}', \ell) \\ &= W_m(\ell) \gamma_{-2m} A^{1-2s} \frac{\Gamma_{-m}(1-s, \ell)}{\Gamma_m(s, \ell)} \zeta_{-m}(1-s, \hat{\mathfrak{d}}', \ell) . \end{aligned}$$

Als nächstes sollen die Funktionen $\zeta_m(s, \hat{a}, \dagger)$ mit Hilfe der Phragmén-Lindelöfschen Methode in einem Streifen

$$S_\rho := \{s \in \mathbb{C} \mid -\rho \leq \operatorname{Re} s \leq 1+\rho\}, \quad 0 < \rho \leq \frac{1}{2},$$

abgeschätzt werden. Völlig analog zu den Beweisen von Th.4 und Th.5 in [4] verläuft der Beweis des folgenden Hilfssatzes.

Hilfssatz 6: Für m gemäß (11), $\dagger$ gemäß (12), $|m|^2 + |\dagger|^2 > 0$, $\hat{a} \in \hat{\mathcal{H}}$, $0 < \rho \leq 1/2$ gilt in S_ρ :

$$|\zeta_m(s, \hat{a}, \dagger)| \leq c_3(\rho) \left\{ \prod_{p=1}^{\hat{r}} |1 + s - iE_p(m)|^{e_p} \right\}^{\frac{1}{2}(1+\rho-\sigma)};$$

für $|t| \geq t_0 > 0$ genügt auch die Funktion $\zeta_\sigma(s, \hat{a}, \sigma)$ dieser Ungleichung.

Beweis: Nach [4], Lemmata 1,2 und 3 gilt für $-\frac{1}{2} \leq \sigma \leq \frac{1}{2}$

$$\left| \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(1-s+iE_p(m))\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(s-iE_p(m))\right)} \right| \leq \left(\frac{1}{2} |1+s-iE_p(m)| \right)^{\frac{1}{2}-\sigma},$$

$$\left| \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(1+1-s+iE_p(m))\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(1+s-iE_p(m))\right)} \right| \leq \left(\frac{1}{2} |1+s-iE_p(m)| \right)^{\frac{1}{2}-\sigma},$$

$$\left| \frac{\Gamma(1-s+iE_p(m))}{\Gamma(s-iE_p(m))} \right| \leq |1+s-iE_p(m)|^{1-2\sigma};$$

hieraus folgt für $-\frac{1}{2} \leq \sigma \leq \frac{1}{2}$, m gemäß (11) und $\dagger$ gemäß (12)

$$\left| \frac{\Gamma_{-m}(1-s, \dagger)}{\Gamma_m(s, \dagger)} \right| = \prod_{p=1}^{\hat{r}} \left| \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(1-s+t_p+iE_p(m))\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(s+t_p-iE_p(m))\right)} \right| \cdot \prod_{p=\hat{r}+1}^{\hat{r}} \left| \frac{\Gamma(1-s+iE_p(m))}{\Gamma(s-iE_p(m))} \right|$$

$$\leq \left\{ \prod_{p=1}^{\hat{r}} \left(\frac{1}{2} |1+s-iE_p(m)| \right) \right\}^{\frac{1}{2}-\sigma} \left\{ \prod_{p=r_1+1}^{\hat{r}} |1+s-iE_p(m)|^2 \right\}^{\frac{1}{2}-\sigma} . \quad (14)$$

Für $\rho^* \geq \rho > 0$ gilt

$$\begin{aligned} |\zeta_m(1+\rho^*+it, \hat{Q}, 4)| &= \left| \sum_{(\hat{\alpha}) \in \hat{Q}} \frac{\lambda_m((\hat{\alpha}), 4)}{N(\hat{\alpha})^{1+\rho^*+it}} \right| \leq \sum_{(\hat{\alpha}) \in \hat{Q}} \frac{1}{N(\hat{\alpha})^{1+\rho^*}} \\ &\leq \sum_{(\hat{\alpha}) \neq (0)} \frac{1}{N(\hat{\alpha})^{1+\rho}} = \zeta_K(1+\rho) \end{aligned} \quad (15)$$

mit

$$\zeta_K(s) := \sum_{\alpha \neq (0)} \frac{1}{N\alpha^s} \quad \text{für } \sigma > 1 ;$$

hieraus erhält man mit Hilfssatz 5b) und (14)

$$\begin{aligned} |\zeta_m(-\rho+it, \hat{Q}, 4)| &\leq \zeta_K(1+\rho) A^{1+2\rho} \cdot \left\{ \prod_{p=1}^{\hat{r}} \left(\frac{e_p}{2} |1-\rho+it-iE_p(m)| \right)^{e_p} \right\}^{\frac{1}{2}+\rho} \\ &= c_4(\rho) \cdot \left\{ \prod_{p=1}^{\hat{r}} \left(\frac{e_p}{2} |1-\rho+it-iE_p(m)| \right)^{e_p} \right\}^{\frac{1}{2}+\rho} . \end{aligned} \quad (16)$$

Da für $-\frac{1}{2} \leq \sigma \leq \frac{3}{2}$

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = O(e^{c_5|t|})$$

ist, gilt in diesem Bereich auch

$$\frac{1}{\Gamma_m(s, 4)} = O(e^{c_6|t|}) . \quad (17)$$

Sei jetzt zunächst $|m|^2 + |4|^2 > 0$ vorausgesetzt; wegen (17) gilt dann in S_ρ , wie aus [2], (40), (42), (43) zu entnehmen ist,

$$\zeta_m(s, \hat{Q}, 4) = O(e^{c_6|t|}) . \quad (18)$$

Nach [4], Satz 1 existieren nun zwei im Streifen S_ρ reguläre Funktionen $\psi_1(s)$, $\psi_2(s)$ mit den Eigenschaften ($j=1,2$):

- 1.) $|\psi_j(-\rho+it)| = |1-\rho+it|^{-j(\frac{1}{2}+\rho)}$,
 - 2.) $|\psi_j(1+\rho+it)| = 1$,
 - 3.) $|\psi_j(s)| \geq |1+s|^{-\frac{j}{2}(1+\rho-\sigma)}$ für $s \in S_\rho$,
 - 4.) $\psi_j(s) = O(|t|^{c_7})$ für $|t| \rightarrow \infty$.
- (19)

Setzt man

$$\Psi(s) := \zeta_{\mathcal{M}}(s, \hat{\Delta}, \hat{A}) \cdot \prod_{p=1}^{r_1} \psi_1(s - iE_p(\mathcal{M})) \cdot \prod_{p=r_1+1}^{\hat{r}} \psi_2(s - iE_p(\mathcal{M})) \cdot Be^{bs},$$

worin B und b so bestimmt sind, daß

$$Be^{-b\rho} = c_4^{-1}(\rho), \quad Be^{b(1+\rho)} = (\zeta_K(1+\rho))^{-1}$$

ist, so folgt aus (15), (16), (18) und (19):

$$|\Psi(-\rho+it)| \leq 1, \quad |\Psi(1+\rho+it)| \leq 1, \quad \Psi(s) = O(e^{c_6|t|}) \quad \text{in } S_\rho.$$

Da ferner nach Hilfssatz 5a) $\Psi(s)$ in S_ρ regulär ist, folgt hieraus nach [4], Th.2:

$$|\Psi(s)| \leq 1 \quad \text{in } S_\rho,$$

also nach (19), 3.):

$$|\zeta_{\mathcal{M}}(s, \hat{\Delta}, \hat{A})| \leq$$

$$\leq \left\{ \prod_{p=1}^{r_1} |1+s-iE_p(m)| \right\}^{\frac{1}{2}(1+\rho-\sigma)} \cdot \left\{ \prod_{p=r_1+1}^{\hat{r}} |1+s-iE_p(m)| \right\}^{1+\rho-\sigma} B^{-1} e^{-b\sigma}$$

$$\leq c_4^*(\rho) \left\{ \prod_{p=1}^{\hat{r}} |1+s-iE_p(m)| e_p \right\}^{\frac{1}{2}(1+\rho-\sigma)} \quad (20)$$

Da die Funktion $\zeta_\sigma(s, \hat{Q}, \sigma)$ nicht in ganz S_ρ regulär ist, kann [4], Th.2 nicht unmittelbar auf $\zeta_\sigma(s, \hat{Q}, \sigma)$ angewendet werden. Daher wird die nach Hilfssatz 5a) überall reguläre Funktion $\zeta_\sigma(s, \hat{Q}, \sigma) \cdot (s-1)$ betrachtet. Aus (15) und (16) erhält man für $0 < \rho \leq 1/2$:

$$|\zeta_\sigma(1+\rho+it, \hat{Q}, \sigma)| \cdot |\rho+it| \leq \zeta_K(1+\rho) \cdot |\rho+it| \leq \zeta_K(1+\rho) \cdot |2+\rho+it| ,$$

$$|\zeta_\sigma(-\rho+it, \hat{Q}, \sigma)| \cdot |-\rho+it-1| \leq c_4(\rho) |1-\rho+it|^{n(\frac{1}{2}+\rho)} |-\rho+it-1|$$

$$\leq c_4(\rho) \frac{1+\rho}{1-\rho} |1-\rho+it|^{n(\frac{1}{2}+\rho)+1} ;$$

ferner gilt wegen (17), wie aus [1], (17a), (23a) zu entnehmen ist,

$$\zeta_\sigma(s, \hat{Q}, \sigma) \cdot (s-1) = O(e^{c_6|t|}) \quad \text{in } S_\rho .$$

Somit gilt nach [4], Th.2 in S_ρ

$$|\zeta_\sigma(s, \hat{Q}, \sigma)| \cdot |s-1|$$

$$\leq \left(c_4(\rho) \frac{1+\rho}{1-\rho} |1+s|^{n(\frac{1}{2}+\rho)+1} \right)^{\frac{1+\rho-\sigma}{1+2\rho}} \left(\zeta_K(1+\rho) \cdot |1+s| \right)^{\frac{\sigma+\rho}{1+2\rho}}$$

$$\leq c_8(\rho) |1+s| \cdot |1+s|^{\frac{n}{2}(1+\rho-\sigma)} ,$$

also für $s \in S_\rho$ mit $|t| \geq t_0 > 0$

$$|\zeta_{\sigma}(s, \hat{Q}, \sigma)| \leq c_8(\rho) \left| \frac{1+s}{1-s} \right| |1+s|^{\frac{n}{2}(1+\rho-\sigma)} \leq c_9(\rho) |1+s|^{\frac{n}{2}(1+\rho-\sigma)}.$$

Aus (20) und der letzten Ungleichung folgt mit $c_3(\rho) := \max\{c_4^*(\rho), c_9(\rho)\}$ die Behauptung des Hilfssatzes.

Anwendung der Summenformel aus §2 auf Funktionen der in Satz 1 beschriebenen Art und Auswertung des Integrals nach dem Residu-
enkalkül liefern das folgende Ergebnis.

Hilfssatz 7: Sei $f(\gamma)$ eine auf der Menge $\mathfrak{n}$ der ganzen Zahlen von K definierte Funktion mit den Eigenschaften, daß

$$f(\zeta_{\sigma}^* \gamma) = f(\gamma), \quad f(\eta_h \gamma) = f(\gamma), \quad h = 1, \dots, r,$$

ist und daß für eine geeignete Konstante $c > 0$ und $\gamma \neq 0$ die Funktion $f(\gamma)N(\gamma)^{-c}$ beschränkt ist. Ferner sei

$$c_0 := \inf \{c > 0 \mid f(\gamma)N(\gamma)^{-c} \text{ beschränkt auf } \mathfrak{n} \setminus \{0\}\}.$$

Die für $\sigma > c_0 + 1$ durch

$$\phi_{\mathfrak{m}}(s) := \sum_{\gamma} \frac{f(\gamma)}{N(\gamma)^s} \exp\{\mathfrak{m}^T \text{Eg}(\gamma)\}$$

definierten Funktionen mögen für gewisse reelle Zahlen z_0, z_1, λ mit $0 \leq z_0 < z_1 \leq c_0 + 1$, $\lambda > 0$ und für jedes reelle ρ mit $0 < \rho < 1/2$ den folgenden Bedingungen genügen:

1.) $\phi_{\mathfrak{m}}(s)$ regulär für $\sigma > z_0$, falls $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{O}$,

2.) $\phi_{\mathfrak{O}}(s)$ regulär für $\sigma > z_0$, $s \neq z_1$,

$$3.) \quad |\phi_{\mathfrak{m}}(s)| \leq c_{10}(\rho) \left\{ \prod_{p=1}^{\hat{r}} |1 + s - iE_p(\mathfrak{m})|^{e_p} \right\}^{\lambda(z_1 + \rho - \sigma)}$$

für $z_0 + 2\rho \leq \sigma \leq c_0 + 1 + \rho$, falls $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{O}$,

$$4.) \quad |\Phi_v(s)| \leq c_{10}(\rho) |1+s|^{n\lambda(z_1+\rho-\sigma)}$$

$$\text{für } z_0+2\rho \leq \sigma \leq c_0+1+\rho, \quad |t| \geq t_0 > 0.$$

Dann gilt mit $l_p := \langle e_p \lambda(z_1 - z_0) \rangle + 1$, $p=1, \dots, \hat{r}$, und $F(x_1, \dots, x_{\hat{r}})$ wie in Satz 2 für $\hat{r} \geq 2$, jedes $\delta > 0$, für $y_1^{(1)}, \dots, y_{l_1-1}^{(1)}, \dots, y_{l_{\hat{r}}-1}^{(\hat{r})}, \dots, y_{l_{\hat{r}}-1}^{(\hat{r})} > 0$ und $x_1 \cdots x_{\hat{r}} \geq 1$:

$$\begin{aligned} & y_{l_{\hat{r}}-1}^{(\hat{r})} y_1^{(\hat{r})} y_{l_1-1}^{(1)} y_1^{(1)} \\ & \int_0^{y_{l_{\hat{r}}-1}^{(\hat{r})}} \cdots \int_0^{y_1^{(\hat{r})}} \cdots \int_0^{y_{l_1-1}^{(1)}} \cdots \int_0^{y_1^{(1)}} F(x_1 + v_1^{(1)} + \dots + v_{l_1-1}^{(1)}, \dots \\ & \dots, x_{\hat{r}} + v_1^{(\hat{r})} + \dots + v_{l_{\hat{r}}-1}^{(\hat{r})}) dv_1^{(1)} \cdots dv_{l_1-1}^{(1)} \cdots dv_1^{(\hat{r})} \cdots dv_{l_{\hat{r}}-1}^{(\hat{r})} \\ & = \frac{w_0}{R} \sum_{k^{(1)}=0}^{l_1-1} \cdots \sum_{k^{(\hat{r})}=0}^{l_{\hat{r}}-1} (-1)^{\sum_{p=1}^{\hat{r}} (k^{(p)} + l_p - 1)} \sum_{1 \leq j_1^{(1)} < \dots < j_{k^{(1)}}^{(1)} \leq l_1-1} \cdots \\ & \cdots \sum_{1 \leq j_1^{(\hat{r})} < \dots < j_{k^{(\hat{r})}}^{(\hat{r})} \leq l_{\hat{r}}-1} \cdot \\ & \cdot \operatorname{Res}_{s=z_1} \Phi_v(s) \prod_{p=1}^{\hat{r}} \frac{\left(x_p + y_{j_1^{(p)}}^{(p)} + \dots + y_{j_{k^{(p)}}^{(p)}}^{(p)} \right)^{s+l_p-1}}{s(s+1) \cdots (s+l_p-1)} + \\ & + O \left(\prod_{p=1}^{\hat{r}} \left(x_p + y_{j_1^{(p)}}^{(p)} + \dots + y_{j_{k^{(p)}}^{(p)}}^{(p)} \right)^{z_0+l_p-1+\delta} \right). \end{aligned}$$

Darin bezeichnet $\langle x \rangle$ die kleinste ganze rationale Zahl, die größer oder gleich x ist, und R den Regulator der Einheiten $\eta_1, \dots, \eta_r$ aus (10).

Beweis: Sei δ mit $0 < \delta < \min\{1, z_1 - z_0\}$ beliebig vorgegeben, und sei $\rho := \delta/2$. Wegen $\hat{r} \geq 2$ und $l_p \geq 2$, $p=1, \dots, \hat{r}$, gilt dann nach Satz 2 für σ_1 mit $c_0 + 1 \leq \sigma_1 \leq c_0 + 1 + \rho$:

$$\begin{aligned}
 & y_{l_{\hat{r}}-1}^{(\hat{r})} y_1^{(\hat{r})} y_{l_1-1}^{(1)} y_1^{(1)} \\
 & \int_0^{\dots} \int_0^{\dots} \int_0^{\dots} \int_0^{\dots} F(x_1 + v_1^{(1)} + \dots + v_{l_1-1}^{(1)}, \dots \\
 & \dots, x_{\hat{r}} + v_1^{(\hat{r})} + \dots + v_{l_{\hat{r}}-1}^{(\hat{r})}) dv_1^{(1)} \dots dv_{l_1-1}^{(1)} \dots dv_1^{(\hat{r})} \dots dv_{l_{\hat{r}}-1}^{(\hat{r})} \\
 & = \frac{w_0}{2\pi i R} \sum_{k^{(1)}=0}^{l_1-1} \dots \sum_{k^{(\hat{r})}=0}^{l_{\hat{r}}-1} (-1)^{\sum_{p=1}^{\hat{r}} (k^{(p)} + l_p - 1)} \sum_{1 \leq j_1^{(1)} < \dots < j_{k^{(1)}}^{(1)} \leq l_1-1} \dots \\
 & \dots \sum_{1 \leq j_1^{(\hat{r})} < \dots < j_{k^{(\hat{r})}}^{(\hat{r})} \leq l_{\hat{r}}-1} \sum_{m_1, \dots, m_r = -\infty}^{\infty} \cdot \quad (21)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sigma_1 + i\infty \\
 & \cdot \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} \phi_{\mathcal{M}}(s) \prod_{p=1}^{\hat{r}} \frac{\left(x_p + y_{j_1^{(p)}}^{(p)} + \dots + y_{j_{k^{(p)}}^{(p)}}^{(p)} \right)^{s + l_p - 1 - iE_p(\mathcal{M})}}{(s - iE_p(\mathcal{M}))(s + 1 - iE_p(\mathcal{M})) \dots (s + l_p - 1 - iE_p(\mathcal{M}))} ds.
 \end{aligned}$$

Verschiebt man hierin den Integrationsweg nach links und integriert entlang der Geraden $\theta := z_0 + \delta$, so ergibt sich für die innerste Summe

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m_1, \dots, m_r = -\infty}^{\infty} \cdot \\
 & \sigma_1 + i\infty \\
 & \cdot \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} \phi_{\mathcal{M}}(s) \prod_{p=1}^{\hat{r}} \frac{\left(x_p + y_{j_1^{(p)}}^{(p)} + \dots + y_{j_{k^{(p)}}^{(p)}}^{(p)} \right)^{s + l_p - 1 - iE_p(\mathcal{M})}}{(s - iE_p(\mathcal{M}))(s + 1 - iE_p(\mathcal{M})) \dots (s + l_p - 1 - iE_p(\mathcal{M}))} ds
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{n_1, \dots, n_r = -\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\int_{\sigma_1 - iT}^{\theta - iT} + \int_{\theta - iT}^{\theta + iT} + \int_{\theta + iT}^{\sigma_1 + iT} \right) \phi_{\mathcal{M}}(s) \cdot \\
 &\quad \cdot \frac{\hat{r}}{\prod_{p=1}^{s+1} (s - iE_p(\mathcal{M})) (s+1 - iE_p(\mathcal{M})) \dots (s+1 - iE_p(\mathcal{M}))} \frac{\left(x_p + y_{j_1}^{(p)} + \dots + y_{j_k^{(p)}}^{(p)} \right)^{s+1-p-1-iE_p(\mathcal{M})}}{ds} + \\
 &\quad + 2\pi i \operatorname{Res}_{s=z_1} \phi_{\mathcal{V}}(s) \frac{\hat{r}}{\prod_{p=1}^{s+1} (s - iE_p(\mathcal{M})) (s+1 - iE_p(\mathcal{M})) \dots (s+1 - iE_p(\mathcal{M}))} \frac{\left(x_p + y_{j_1}^{(p)} + \dots + y_{j_k^{(p)}}^{(p)} \right)^{s+1-p-1-iE_p(\mathcal{M})}}{s(s+1) \dots (s+1-p-1)} .
 \end{aligned} \tag{22}$$

Wegen der Voraussetzungen bzgl. der Funktionen $\phi_{\mathcal{M}}(s)$ gilt für $x_1 \dots x_{\hat{r}} \geq 1$ und $T \geq T_0 \geq t_0 > 0$:

$$\begin{aligned}
 &\left| \int_{\theta + iT}^{\sigma_1 + iT} \phi_{\mathcal{M}}(s) \frac{\hat{r}}{\prod_{p=1}^{s+1} (s - iE_p(\mathcal{M})) (s+1 - iE_p(\mathcal{M})) \dots (s+1 - iE_p(\mathcal{M}))} \frac{\left(x_p + y_{j_1}^{(p)} + \dots + y_{j_k^{(p)}}^{(p)} \right)^{s+1-p-1-iE_p(\mathcal{M})}}{ds} \right| \\
 &\leq c_{10}(\rho) \frac{\hat{r}}{\prod_{p=1}^{s+1} (x_p + y_{j_1}^{(p)} + \dots + y_{j_k^{(p)}}^{(p)})^{\sigma_1 + 1 - p - 1}} .
 \end{aligned} \tag{23}$$

$$\int_{\theta}^{\sigma_1} \frac{\hat{r}}{\prod_{p=1}^{s+1} (x_p + y_{j_1}^{(p)} + \dots + y_{j_k^{(p)}}^{(p)})^{\sigma_1 + 1 - p - 1}} \frac{| \sigma + 1 + iT - iE_p(\mathcal{M}) | e^{p \lambda(z_1 + \rho - \sigma)}}{| \sigma + iT - iE_p(\mathcal{M}) | | \sigma + 1 + iT - iE_p(\mathcal{M}) | \dots | \sigma + 1 - p + iT - iE_p(\mathcal{M}) |} d\sigma ;$$

das Integral läßt sich hierin abschätzen durch

$$\begin{aligned}
 &\int_{\theta}^{\sigma_1} \frac{\hat{r}}{\prod_{p=1}^{s+1} (x_p + y_{j_1}^{(p)} + \dots + y_{j_k^{(p)}}^{(p)})^{\sigma_1 + 1 - p - 1}} \frac{| \sigma + 1 + iT - iE_p(\mathcal{M}) | e^{p \lambda(z_1 + \rho - \sigma)}}{| \sigma + iT - iE_p(\mathcal{M}) | | \sigma + 1 + iT - iE_p(\mathcal{M}) | \dots | \sigma + 1 - p + iT - iE_p(\mathcal{M}) |} d\sigma \\
 &= \int_{\theta}^{\sigma_1} \frac{\hat{r}}{\prod_{p=1}^{s+1} (x_p + y_{j_1}^{(p)} + \dots + y_{j_k^{(p)}}^{(p)})^{\sigma_1 + 1 - p - 1}} \frac{1}{| \sigma + iT - iE_p(\mathcal{M}) | | \sigma + 1 + iT - iE_p(\mathcal{M}) | \dots | \sigma + 1 - p + iT - iE_p(\mathcal{M}) |} e^{p \lambda(z_1 - z_0 - \rho)} d\sigma
 \end{aligned}$$

$$\leq \int_0^{\sigma_1} \prod_{p=1}^{\hat{r}} \frac{1}{|\sigma + iT - iE_p(\mathcal{M})| |\sigma + 1 + iT - iE_p(\mathcal{M})|} e^{p\lambda\rho} d\sigma$$

$$\leq c_{11} \prod_{p=1}^{\hat{r}} \left(\frac{1}{T}\right)^{1+e_p\lambda\rho} = \frac{c_{11}}{T^{\hat{r}+n\lambda\rho}},$$

so daß man mit (23) erhält:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\sigma_1 + iT}^{\sigma_1 + i\tau} \phi_{\mathcal{M}}(s) \prod_{p=1}^{\hat{r}} \frac{\left(x_p + y_{j_1^{(p)}}^{(p)} + \dots + y_{j_k^{(p)}}^{(p)}\right)^{s+1-p-1-iE_p(\mathcal{M})}}{(s-iE_p(\mathcal{M})) \dots (s+1-p-1-iE_p(\mathcal{M}))} ds = 0; \quad (24)$$

analog sieht man:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\sigma_1 - iT}^{\theta - iT} \phi_{\mathcal{M}}(s) \prod_{p=1}^{\hat{r}} \frac{\left(x_p + y_{j_1^{(p)}}^{(p)} + \dots + y_{j_k^{(p)}}^{(p)}\right)^{s+1-p-1-iE_p(\mathcal{M})}}{(s-iE_p(\mathcal{M})) \dots (s+1-p-1-iE_p(\mathcal{M}))} ds = 0. \quad (25)$$

Ferner gilt

$$\left| \sum_{\substack{m_1, \dots, m_r = -\infty \\ m \neq \mathcal{O}}}^{\infty} \right|$$

$$\cdot \int_{\theta - i\infty}^{\theta + i\infty} \phi_{\mathcal{M}}(s) \prod_{p=1}^{\hat{r}} \frac{\left(x_p + y_{j_1^{(p)}}^{(p)} + \dots + y_{j_k^{(p)}}^{(p)}\right)^{s+1-p-1-iE_p(\mathcal{M})}}{(s-iE_p(\mathcal{M})) (s+1-iE_p(\mathcal{M})) \dots (s+1-p-1-iE_p(\mathcal{M}))} ds$$

$$\leq c_{10}(\rho) \prod_{p=1}^{\hat{r}} \left(x_p + y_{j_1^{(p)}}^{(p)} + \dots + y_{j_k^{(p)}}^{(p)}\right)^{\theta+1-p-1} \cdot \sum_{\substack{m_1, \dots, m_r = -\infty \\ m \neq \mathcal{O}}}^{\infty}.$$

(26)

$$\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{p=1}^{\hat{r}} \frac{|\theta + 1 + it - iE_p(\mathcal{M})| e^{p\lambda(z_1 + \rho - \theta)}}{|\theta + it - iE_p(\mathcal{M})| |\theta + 1 + it - iE_p(\mathcal{M})| \dots |\theta + 1 - 1 + it - iE_p(\mathcal{M})|} dt$$

$$\leq c_{10}(\rho) \prod_{p=1}^{\hat{r}} \left(x_p + y_1^{(p)} + \dots + y_{l_p-1}^{(p)} \right)^{z_0+1} p^{-1+\delta}.$$

$$\cdot \sum_{\substack{m_1, \dots, m_r = -\infty \\ m \neq \emptyset}}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{p=1}^{\hat{r}} \frac{|\theta+1+it-iE_p(m)|^{e_p \lambda (z_1+p-\theta)}}{|\theta+it-iE_p(m)| |\theta+1+it-iE_p(m)|^{\frac{1}{p}-1}} dt;$$

darin läßt sich die r-fache Reihe weiter abschätzen durch

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{m_1, \dots, m_r = -\infty \\ m \neq \emptyset}}^{\infty} \cdot \\ & \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{p=1}^{\hat{r}} \frac{1}{|\theta+it-iE_p(m)| |\theta+1+it-iE_p(m)|^{\frac{1}{p}-1-e_p \lambda (z_1-z_0-p)}} dt \\ & \leq \sum_{\substack{m_1, \dots, m_r = -\infty \\ m \neq \emptyset}}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{p=1}^{\hat{r}} \frac{1}{|\theta+it-iE_p(m)| |\theta+1+it-iE_p(m)|^{e_p \lambda \rho}} dt \\ & \leq \sum_{\substack{m_1, \dots, m_r = -\infty \\ m \neq \emptyset}}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{p=1}^{\hat{r}} \frac{1}{|\theta+it-iE_p(m)| |\theta+1+it-iE_p(m)|^{\lambda \rho}} dt \quad (27) \\ & \leq \sum_{\substack{m_1, \dots, m_r = -\infty \\ m \neq \emptyset}}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{p=1}^{\hat{r}} \frac{1}{|\theta+it-iE_p(m)|^{1+\lambda \rho}} dt \\ & = \sum_{\substack{m_1, \dots, m_r = -\infty \\ m \neq \emptyset}}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \prod_{p=1}^{\hat{r}} \frac{1}{|\theta+i\tau-i[E_p(m)-E_{\hat{r}}(m)]|^{1+\lambda \rho}} \right\} \frac{d\tau}{|\theta+i\tau|^{1+\lambda \rho}}. \end{aligned}$$

Analog wie beim Nachweis der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe (2) im Beweis von Satz 1 sieht man:

$$\sum_{\substack{m_1, \dots, m_r = -\infty \\ m \neq \emptyset}}^{\infty} \prod_{p=1}^{\hat{r}} \frac{1}{|\theta+i\tau-i[E_p(m)-E_{\hat{r}}(m)]|^{1+\lambda \rho}} \leq$$

$$\leq 2^{r_{G_K}} \sum_{b_1, \dots, b_r=0}^{\infty} \prod_{p=1}^r \frac{1}{|\theta + i b_p|^{1+\lambda\rho}}$$

$$= 2^{r_{G_K}} \prod_{p=1}^r \sum_{b_p=0}^{\infty} \frac{1}{(\theta^2 + b_p^2)^{\frac{1}{2}(1+\lambda\rho)}} =: c_{12}(\rho) \quad .$$

Hiermit folgt aus (26) und (27)

$$\left| \sum_{\substack{m_1, \dots, m_r = -\infty \\ m \neq \emptyset}}^{\infty} \cdot \right.$$

$$\cdot \int_{\theta-i\infty}^{\theta+i\infty} \phi_m(s) \prod_{p=1}^{\hat{r}} \frac{\left(x_p + y_{j_1^{(p)}}^{(p)} + \dots + y_{j_k^{(p)}}^{(p)} \right)^{s+1_p-1-iE_p(m)}}{(s-iE_p(m))(s+1-iE_p(m)) \dots (s+1_p-1-iE_p(m))} ds \quad \left| \right.$$

$$\leq c_{10}(\rho) \prod_{p=1}^{\hat{r}} \left(x_p + y_{j_1^{(p)}}^{(p)} + \dots + y_{j_{p-1}^{(p)}}^{(p)} \right)^{z_0+1_p-1+\delta} \quad .$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{\substack{m_1, \dots, m_r = -\infty \\ m \neq \emptyset}}^{\infty} \prod_{p=1}^r \frac{1}{|\theta + i\tau - i(E_p(m) - E_{\hat{r}}(m))|^{1+\lambda\rho}} \right\} \frac{d\tau}{|\theta + i\tau|^{1+\lambda\rho}}$$

$$\leq c_{10}(\rho) c_{12}(\rho) \prod_{p=1}^{\hat{r}} \left(x_p + y_{j_1^{(p)}}^{(p)} + \dots + y_{j_{p-1}^{(p)}}^{(p)} \right)^{z_0+1_p-1+\delta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{|\theta + i\tau|^{1+\lambda\rho}}$$

$$= c_{13}(\rho) \prod_{p=1}^{\hat{r}} \left(x_p + y_{j_1^{(p)}}^{(p)} + \dots + y_{j_{p-1}^{(p)}}^{(p)} \right)^{z_0+1_p-1+\delta} \quad .$$

Berücksichtigt man noch

$$\left| \int_{\theta-i\infty}^{\theta+i\infty} \phi_v(s) \prod_{p=1}^{\hat{r}} \frac{\left(x_p + y_{j_1^{(p)}}^{(p)} + \dots + y_{j_k^{(p)}}^{(p)} \right)^{s+1_p-1}}{s(s+1) \dots (s+1_p-1)} ds \right| \leq$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \prod_{p=1}^{\hat{r}} \left(x_p^{(p)} y_{j_1^{(p)}}^{(p)} + \dots + y_{j_k^{(p)}}^{(p)} \right)^{\theta+1_p-1} \cdot \\
 &\cdot \left(\int_{|t| < t_0} |\Phi_{\sigma}(\theta+it)| \prod_{p=1}^{\hat{r}} \frac{1}{|\theta+it| |\theta+1+it| \dots |\theta+1_p-1+it|} dt + \right. \\
 &\quad \left. + c_{10}(\rho) \int_{|t| \geq t_0} \prod_{p=1}^{\hat{r}} \frac{|\theta+1+it| e_p^{\lambda(z_1+p-\theta)}}{|\theta+it| |\theta+1+it| \dots |\theta+1_p-1+it|} dt \right) \\
 &\leq \prod_{p=1}^{\hat{r}} \left(x_p^{(p)} x_{j_1^{(p)}-1}^{(p)} + \dots + y_{j_k^{(p)}-1}^{(p)} \right)^{z_0+1_p-1+\delta} \cdot \\
 &\cdot \left(c_{14}(\delta) + c_{10}(\rho) \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{p=1}^{\hat{r}} \frac{1}{|\theta+it| |\theta+1+it|} \frac{1}{1_p^{-1} - e_p^{\lambda(z_1-z_0-p)}} dt \right)
 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 &\int_{-\infty}^{\infty} \prod_{p=1}^{\hat{r}} \frac{1}{|\theta+it| |\theta+1+it|} \frac{1}{1_p^{-1} - e_p^{\lambda(z_1-z_0-p)}} dt \\
 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{p=1}^{\hat{r}} \frac{1}{|\theta+it| |\theta+1+it|} \frac{1}{e_p^{\lambda \rho}} dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{|\theta+it|^{\hat{r}+n\lambda \rho}} =: c_{15}(\rho) \quad ,
 \end{aligned}$$

so erhält man schließlich:

$$\begin{aligned}
 &\left| \sum_{m_1, \dots, m_r = -\infty}^{\infty} \cdot \right. \\
 &\cdot \left. \int_{\theta-i\infty}^{\theta+i\infty} \Phi_{\mathcal{M}}(s) \prod_{p=1}^{\hat{r}} \frac{\left(x_p^{(p)} y_{j_1^{(p)}}^{(p)} + \dots + y_{j_k^{(p)}}^{(p)} \right)^{s+1_p-1-iE_p(\mathcal{M})}}{(s-iE_p(\mathcal{M}))(s+1-iE_p(\mathcal{M})) \dots (s+1_p-1-iE_p(\mathcal{M}))} ds \right| \leq
 \end{aligned}$$

$$\leq c_{16}(\delta) \prod_{p=1}^{\hat{r}} \left(x_p + y_1^{(p)} + \dots + y_{l_p-1}^{(p)} \right)^{z_0 + l_p - 1 + \delta} . \quad (28)$$

Durch Einsetzen von (22), (24), (25) und (28) in (21) ergibt sich die Behauptung

Korollar 2: Die Funktionen $f(\gamma)$, $\phi_{\mathcal{M}}(s)$ mögen die Voraussetzungen von Hilfssatz 7 erfüllen; ferner sei $\lambda(z_1 - z_0) \leq 1/2$. Dann gilt für $\hat{r} \geq 2$, jedes $\delta > 0$, für $y^{(1)}, \dots, y^{(\hat{r})} > 0$ und $x_1 \dots x_{\hat{r}} \geq 1$:

$$\begin{aligned} & \int_0^{y^{(\hat{r})}} \dots \int_0^{y^{(1)}} F(x_1 + v^{(1)}, \dots, x_{\hat{r}} + v^{(\hat{r})}) dv^{(1)} \dots dv^{(\hat{r})} \\ &= \frac{w_0}{R} \operatorname{Res}_{s=z_1} \phi_{\mathcal{O}}(s) \prod_{p=1}^{\hat{r}} \frac{(x_p + y^{(p)})^{s+1} - x_p^{s+1}}{s(s+1)} + \\ & \quad + \mathcal{O} \left(\left\{ \prod_{p=1}^{\hat{r}} (x_p + y^{(p)}) \right\}^{z_0 + 1 + \delta} \right) . \end{aligned}$$

Beweis: Wegen $\lambda(z_1 - z_0) \leq 1/2$ ist in Hilfssatz 7 $l_1 = \dots = l_{\hat{r}} = 2$.

Bemerkung: Korollar 2 läßt sich mit Korollar 1 anstelle von Satz 2 beweisen.

Zur Auswertung des in Hilfssatz 7 auftretenden Residuums werden die beiden folgenden Beziehungen benötigt.

Hilfssatz 8:

a) Für $l \geq 2$, $x, y_1, \dots, y_{l-1} > 0$ und $\operatorname{Re} s > 0$ gilt

$$\int_0^{y_{l-1}} \dots \int_0^{y_1} \int_0^{x + v_1 + \dots + v_{l-1}} u^{s-1} du dv_1 \dots dv_{l-1} =$$

$$= \frac{1}{s(s+1)\cdots(s+l-1)} \sum_{k=0}^{l-1} (-1)^{k+l-1} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq l-1} (x+y_{j_1}+\dots+y_{j_k})^{s+l-1} ;$$

b) Für $m \geq 0$, $k \geq 0$ und $w_1, \dots, w_{m+1} > 0$ gilt

$$\begin{aligned} & \int_0^{w_{m+1}} \cdots \int_0^{w_1} (\log t_1 \cdots t_{m+1})^k dt_1 \cdots dt_{m+1} \\ &= w_1 \cdots w_{m+1} \sum_{\kappa=0}^k (-1)^{k-\kappa} \frac{k!}{\kappa!} \binom{k-\kappa+m}{m} (\log w_1 \cdots w_{m+1})^\kappa . \end{aligned}$$

Beweis: a) Für $l=2$ ist die Gleichung richtig, denn es ist

$$\begin{aligned} \int_0^{y_1} \int_0^{x+v_1} u^{s-1} du dv_1 &= \int_0^{y_1} \frac{1}{s} (x+v_1)^s dv_1 \\ &= \frac{1}{s(s+1)} \left\{ (x+y_1)^{s+1} - x^{s+1} \right\} ; \end{aligned}$$

setzt man die behauptete Gleichung für ein $l \geq 2$ voraus, so erhält man

$$\begin{aligned} & \int_0^{y_1} \cdots \int_0^{y_1} \int_0^{x+v_1+\dots+v_l} u^{s-1} du dv_1 \cdots dv_l \\ &= \int_0^{y_1} \left(\int_0^{y_{l-1}} \cdots \int_0^{y_1} \int_0^{(x+v_1)+v_1+\dots+v_{l-1}} u^{s-1} du dv_1 \cdots dv_{l-1} \right) dv_l \\ &= \frac{1}{s(s+1)\cdots(s+l-1)} \sum_{k=0}^{l-1} (-1)^{k+l-1} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq l-1} \\ & \quad \cdot \int_0^{y_1} (x+v_1+y_{j_1}+\dots+y_{j_k})^{s+l-1} dv_l \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{s(s+1)\dots(s+1-1)} \sum_{k=0}^{1-1} (-1)^{k+1-1} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq 1-1} \cdot \\
 &\quad \cdot \frac{1}{s+1} \left\{ (x+y_{j_1} + \dots + y_{j_k} + y_1)^{s+1} - (x+y_{j_1} + \dots + y_{j_k})^{s+1} \right\} \\
 &= \frac{1}{s(s+1)\dots(s+1)} \left(\sum_{k=1}^1 (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k = 1} (x+y_{j_1} + \dots + y_{j_k})^{s+1} + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=0}^{1-1} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq 1-1} (x+y_{j_1} + \dots + y_{j_k})^{s+1} \right) \\
 &= \frac{1}{s(s+1)\dots(s+1)} \sum_{k=0}^1 (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq 1} (x+y_{j_1} + \dots + y_{j_k})^{s+1} .
 \end{aligned}$$

b) Durch Induktion nach m wird für $\delta > 0$, $a > 0$ gezeigt:

$$\begin{aligned}
 &\int_{\delta}^{w_{m+1}} \int_0^{w_m} \dots \int_0^{w_1} (\log t_1 \dots t_{m+1} a)^k dt_1 \dots dt_{m+1} = w_1 \dots w_m \cdot \\
 &\quad \cdot \sum_{\kappa=0}^k (-1)^{k-\kappa} \frac{k!}{\kappa!} \binom{k-\kappa+m}{m} \left\{ w_{m+1} (\log w_1 \dots w_{m+1} a)^{\kappa-\delta} (\log w_1 \dots w_m \delta a)^{\kappa} \right\}. \quad (29)
 \end{aligned}$$

Für den Fall $m=0$ ist zu zeigen

$$\int_{\delta}^w (\log ta)^k dt = \sum_{\kappa=0}^k (-1)^{k-\kappa} \frac{k!}{\kappa!} \left\{ w (\log wa)^{\kappa-\delta} (\log \delta a)^{\kappa} \right\} ;$$

dies sieht man durch Induktion nach k ; denn für $k=0$ ist die letzte Gleichung trivial, und setzt man sie für ein $k \geq 0$ voraus, so erhält man

$$\int_{\delta}^w (\log ta)^{k+1} dt = \left\{ t (\log ta)^{k+1} \right\}_{\delta}^w - (k+1) \int_{\delta}^w (\log ta)^k dt$$

$$\begin{aligned}
 &= w(\log wa)^{k+1} - \delta(\log \delta a)^{k+1} - (k+1) \sum_{\kappa=0}^k (-1)^{k-\kappa} \frac{k!}{\kappa!} \cdot \\
 &\quad \cdot \{w(\log wa)^\kappa - \delta(\log \delta a)^\kappa\} \\
 &= \sum_{\kappa=0}^{k+1} (-1)^{k+1-\kappa} \frac{(k+1)!}{\kappa!} \{w(\log wa)^\kappa - \delta(\log \delta a)^\kappa\} .
 \end{aligned}$$

Sei jetzt (29) für μ mit $0 \leq \mu \leq m$ vorausgesetzt; dann ist

$$\begin{aligned}
 &\int_{\delta}^{w_{m+2}} \int_0^{w_{m+1}} \dots \int_0^{w_1} (\log t_1 \dots t_{m+2} a)^k dt_1 \dots dt_{m+2} \\
 &= \int_{\delta}^{w_{m+2}} \lim_{\delta' \rightarrow 0} \int_{\delta'}^{w_{m+1}} \int_0^{w_m} \dots \int_0^{w_1} (\log t_1 \dots t_{m+1} (t_{m+2} a))^k dt_1 \dots dt_{m+1} dt_{m+2} \\
 &= w_1 \dots w_m \sum_{\kappa=0}^k (-1)^{k-\kappa} \frac{k!}{\kappa!} \binom{k-\kappa+m}{m} \int_{\delta}^{w_{m+2}} \{w_{m+1} (\log w_1 \dots w_{m+1} t_{m+2} a)^\kappa - \\
 &\quad - \lim_{\delta' \rightarrow 0} \delta' (\log w_1 \dots w_m \delta' t_{m+2} a)^\kappa\} dt_{m+2} \\
 &= w_1 \dots w_{m+1} \sum_{\kappa=0}^k (-1)^{k-\kappa} \frac{k!}{\kappa!} \binom{k-\kappa+m}{m} \int_{\delta}^{w_{m+2}} (\log w_1 \dots w_{m+1} t_{m+2} a)^\kappa dt_{m+2} \\
 &= w_1 \dots w_{m+1} \sum_{\kappa=0}^k (-1)^{k-\kappa} \frac{k!}{\kappa!} \binom{k-\kappa+m}{m} \sum_{\lambda=0}^{\kappa} (-1)^{\kappa-\lambda} \frac{\kappa!}{\lambda!} \cdot \\
 &\quad \cdot \{w_{m+2} (\log w_1 \dots w_{m+2} a)^\lambda - \delta (\log w_1 \dots w_{m+1} \delta a)^\lambda\} \\
 &= w_1 \dots w_{m+1} \sum_{\lambda=0}^k (-1)^{k-\lambda} \frac{k!}{\lambda!} \{w_{m+2} (\log w_1 \dots w_{m+2} a)^\lambda - \\
 &\quad - \delta (\log w_1 \dots w_{m+1} \delta a)^\lambda\} \sum_{\kappa=\lambda}^k \binom{k-\kappa+m}{m} ;
 \end{aligned}$$

es bleibt noch zu zeigen:

$$\sum_{\kappa=\lambda}^k \binom{k-\kappa+m}{m} = \binom{k-\lambda+m+1}{m+1} ;$$

dies ist gleichbedeutend mit ($\rho:=k-\kappa$):

$$\sum_{\rho=0}^{k-\lambda} \binom{\rho+m}{m} = \binom{k-\lambda+m+1}{m+1} ;$$

es genügt somit,

$$\sum_{\rho=0}^p \binom{\rho+m}{m} = \binom{p+m+1}{m+1} , \quad p = 0, 1, \dots ,$$

nachzuweisen; dies sieht man jedoch leicht durch Induktion nach p :

$$\binom{m}{m} = \binom{m+1}{m+1} ,$$

$$\sum_{\rho=0}^{p+1} \binom{\rho+m}{m} = \sum_{\rho=0}^p \binom{\rho+m}{m} + \binom{p+1+m}{m} = \binom{p+m+1}{m+1} + \binom{p+m+1}{m} = \binom{p+m+2}{m+2} .$$

Damit ist (29) bewiesen. Aus (29) folgt

$$\begin{aligned} & \int_0^{w_{m+1}} \dots \int_0^{w_1} (\log t_1 \dots t_{m+1} a)^k dt_1 \dots dt_{m+1} \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^{w_{m+1}} \int_0^{w_m} \dots \int_0^{w_1} (\log t_1 \dots t_{m+1} a)^k dt_1 \dots dt_{m+1} \\ &= w_1 \dots w_m \sum_{\kappa=0}^k (-1)^{k-\kappa} \frac{k!}{\kappa!} \binom{k-\kappa+m}{m} \{w_{m+1} (\log w_1 \dots w_{m+1} a)^\kappa - \\ & \quad - \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta (\log w_1 \dots w_m a)^\kappa\} \\ &= w_1 \dots w_{m+1} \sum_{\kappa=0}^k (-1)^{k-\kappa} \frac{k!}{\kappa!} \binom{k-\kappa+m}{m} (\log w_1 \dots w_{m+1} a)^\kappa . \end{aligned}$$

Mit $a=1$ folgt hieraus die Behauptung.

Da bei den meisten der in den folgenden §§ behandelten Anwendungen die Voraussetzungen von Hilfssatz 7 mit $z_0 < 1$ und $z_1 = 1$ erfüllt sind, soll für diesen Fall die Auswertung des Residuums aus Hilfssatz 7 in allgemeiner Form durchgeführt werden.

Hilfssatz 9: Die Funktionen $f(\gamma)$, $\Phi_\sigma(s)$ mögen den Voraussetzungen von Hilfssatz 7 mit $z_0 < 1$ und $z_1 = 1$ genügen; ferner sei $f(\gamma) \geq 0$ für alle ganzen Zahlen $\gamma \in K$. Die Funktion $\Phi_\sigma(s)$ habe im Punkte $z_1 = 1$ einen Pol der Ordnung $P \geq 1$ mit dem Hauptteil

$$\sum_{p=1}^P \frac{A_p}{(s-1)^p}.$$

Dann gilt in den Bezeichnungen von Hilfssatz 7 für $\hat{r} \geq 2$, $x_1, \dots, x_{\hat{r}} > 0$ und für jedes $\delta > 0$:

$$F(x_1, \dots, x_{\hat{r}}) = x_1 \cdots x_{\hat{r}} \frac{w_0}{R} \sum_{k=0}^{P-1} B_k (\log x_1 \cdots x_{\hat{r}})^k + \\ + O\left((x_1 \cdots x_{\hat{r}})^{1-(1-z_0)\left(\sum_{p=1}^{\hat{r}} (l_p-1)+1\right)^{-1}+\delta} \right)$$

mit

$$B_k := \frac{1}{k!} \sum_{p=k+1}^P (-1)^{p-1-k} \binom{r+p-1-k}{r} A_p.$$

Beweis: Nach Hilfssatz 7 gilt für $\hat{r} \geq 2$, jedes $\delta > 0$, für $y_1^{(1)}, \dots, y_{l_1-1}^{(1)}, \dots, y_1^{(\hat{r})}, \dots, y_{l_{\hat{r}}-1}^{(\hat{r})} > 0$ und $x_1 \cdots x_{\hat{r}} \geq 1$

$$y_{l_{\hat{r}}-1}^{(\hat{r})} y_1^{(\hat{r})} y_{l_1-1}^{(1)} y_1^{(1)} \\ \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty F(x_1 + v_1^{(1)} + \dots + v_{l_1-1}^{(1)}, \dots$$

$$\begin{aligned}
 & \dots, x_{\hat{r}+v_1}^{(\hat{r})} + \dots + v_{1_{\hat{r}-1}}^{(\hat{r})} dv_1^{(1)} \dots dv_{1_{1-1}}^{(1)} \dots dv_1^{(\hat{r})} \dots dv_{1_{\hat{r}-1}}^{(\hat{r})} \\
 &= \frac{w_0}{R} \sum_{k^{(1)}=0}^{1_1-1} \dots \sum_{k^{(\hat{r})}=0}^{1_{\hat{r}}-1} (-1)^{\sum_{p=1}^{\hat{r}} (k^{(p)} + 1_p - 1)} \sum_{1 \leq j_1^{(1)} < \dots < j_{k^{(1)}}^{(1)} \leq 1_1-1} \dots \\
 & \dots \sum_{1 \leq j_1^{(\hat{r})} < \dots < j_{k^{(\hat{r})}}^{(\hat{r})} \leq 1_{\hat{r}}-1} \cdot \\
 & \cdot \operatorname{Res}_{s=1} \phi_{\sigma}(s) \prod_{p=1}^{\hat{r}} \frac{\left(x_p + y_{j_1^{(p)}}^{(p)} + \dots + y_{j_{k^{(p)}}^{(p)}}^{(p)} \right)^{s+1_p-1}}{s(s+1) \dots (s+1_p-1)} + \\
 & + O \left(\prod_{p=1}^{\hat{r}} \left(x_p + y_1^{(p)} + \dots + y_{1_p-1}^{(p)} \right)^{z_0 + 1_p - 1 + \delta} \right).
 \end{aligned}$$

Nach Hilfssatz 8a) ist

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k^{(1)}=0}^{1_1-1} \dots \sum_{k^{(\hat{r})}=0}^{1_{\hat{r}}-1} (-1)^{\sum_{p=1}^{\hat{r}} (k^{(p)} + 1_p - 1)} \sum_{1 \leq j_1^{(1)} < \dots < j_{k^{(1)}}^{(1)} \leq 1_1-1} \dots \\
 & \dots \sum_{1 \leq j_1^{(\hat{r})} < \dots < j_{k^{(\hat{r})}}^{(\hat{r})} \leq 1_{\hat{r}}-1} \cdot \\
 & \cdot \operatorname{Res}_{s=1} \phi_{\sigma}(s) \prod_{p=1}^{\hat{r}} \frac{\left(x_p + y_{j_1^{(p)}}^{(p)} + \dots + y_{j_{k^{(p)}}^{(p)}}^{(p)} \right)^{s+1_p-1}}{s(s+1) \dots (s+1_p-1)} \\
 &= \operatorname{Res}_{s=1} \phi_{\sigma}(s) \prod_{p=1}^{\hat{r}} \sum_{k^{(p)}=0}^{1_p-1} (-1)^{k^{(p)} + 1_p - 1} \cdot
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot \sum_{1 \leq j_1^{(p)} < \dots < j_k^{(p)} \leq l_p - 1} \frac{\left(x_p^{(p)} y_{j_1^{(p)}}^{(p)} + \dots + y_{j_k^{(p)}}^{(p)} \right)^{s+l_p-1}}{s(s+1) \dots (s+l_p-1)} \\
 & = \operatorname{Res}_{s=1} \phi_{\sigma}(s) \frac{\hat{r}}{\prod_{p=1}^{\hat{r}}} \int_0^{y_{l_p-1}^{(p)}} \dots \int_0^{y_1^{(p)}} x_p^{(p)} + v_1^{(p)} + \dots + v_{l_p-1}^{(p)} \int_0^{(u^{(p)})^{s-1}} \cdot \\
 & \quad \cdot du^{(p)} dv_1^{(p)} \dots dv_{l_p-1}^{(p)} \\
 & = \operatorname{Res}_{s=1} \int_0^{y_{l_{\hat{r}}-1}^{(\hat{r})}} \dots \int_0^{y_1^{(\hat{r})}} y_{l_1-1}^{(1)} y_1^{(1)} x_{\hat{r}}^{(1)} + v_1^{(\hat{r})} + \dots + v_{l_{\hat{r}}-1}^{(\hat{r})} \int_0^{\dots} \dots \\
 & \quad \dots \int_0^{x_1 + v_1^{(1)} + \dots + v_{l_1-1}^{(1)}} (u^{(1)} \dots u^{(\hat{r})})^{s-1} \phi_{\sigma}(s) du^{(1)} \dots du^{(\hat{r})} \cdot \\
 & \quad \cdot dv_1^{(1)} \dots dv_{l_1-1}^{(1)} \dots dv_1^{(\hat{r})} \dots dv_{l_{\hat{r}}-1}^{(\hat{r})} \\
 & = \int_0^{y_{l_{\hat{r}}-1}^{(\hat{r})}} \dots \int_0^{y_1^{(\hat{r})}} y_{l_1-1}^{(1)} y_1^{(1)} x_{\hat{r}}^{(1)} + v_1^{(\hat{r})} + \dots + v_{l_{\hat{r}}-1}^{(\hat{r})} \int_0^{\dots} \dots \\
 & \quad \dots \int_0^{x_1 + v_1^{(1)} + \dots + v_{l_1-1}^{(1)}} \operatorname{Res}_{s=1} (u^{(1)} \dots u^{(\hat{r})})^{s-1} \phi_{\sigma}(s) du^{(1)} \dots du^{(\hat{r})} \cdot \\
 & \quad \cdot dv_1^{(1)} \dots dv_{l_1-1}^{(1)} \dots dv_1^{(\hat{r})} \dots dv_{l_{\hat{r}}-1}^{(\hat{r})} ;
 \end{aligned}$$

darin ist

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{Res}_{s=1} (u^{(1)} \dots u^{(\hat{r})})^{s-1} \phi_{\sigma}(s) \\
 &= \frac{1}{(P-1)!} \lim_{s \rightarrow 1} \left(\frac{d}{ds} \right)^{P-1} \left((u^{(1)} \dots u^{(\hat{r})})^{s-1} \sum_{\rho=1}^P A_{\rho} (s-1)^{P-\rho} \right) \\
 &= \frac{1}{(P-1)!} \sum_{\rho=1}^P A_{\rho} \lim_{s \rightarrow 1} \left(\frac{d}{ds} \right)^{P-1} \left((u^{(1)} \dots u^{(\hat{r})})^{s-1} (s-1)^{P-\rho} \right) \\
 &= \frac{1}{(P-1)!} \sum_{\rho=1}^P A_{\rho} \lim_{s \rightarrow 1} \sum_{\mu=0}^{P-1} \binom{P-1}{\mu} \left(\frac{d^{\mu}}{ds^{\mu}} (u^{(1)} \dots u^{(\hat{r})})^{s-1} \right) \cdot \\
 &\quad \cdot \left(\frac{d^{P-1-\mu}}{ds^{P-1-\mu}} (s-1)^{P-\rho} \right) \\
 &= \frac{1}{(P-1)!} \sum_{\rho=1}^P A_{\rho} \lim_{s \rightarrow 1} \sum_{\mu=\rho-1}^{P-1} \binom{P-1}{\mu} (u^{(1)} \dots u^{(\hat{r})})^{s-1} \cdot \\
 &\quad \cdot (\log u^{(1)} \dots u^{(\hat{r})})^{\mu} \frac{(P-\rho)!}{(\mu+1-\rho)!} (s-1)^{\mu+1-\rho} \\
 &= \frac{1}{(P-1)!} \sum_{\rho=1}^P A_{\rho} \binom{P-1}{\rho-1} (\log u^{(1)} \dots u^{(\hat{r})})^{\rho-1} (P-\rho)! \\
 &= \sum_{\rho=1}^P \frac{A_{\rho}}{(\rho-1)!} (\log u^{(1)} \dots u^{(\hat{r})})^{\rho-1} .
 \end{aligned}$$

Eingesetzt, ergibt dies

$$\begin{aligned}
 & y_{1_{\hat{r}}-1}^{(\hat{r})} y_1^{(\hat{r})} y_{1_1-1}^{(1)} y_1^{(1)} \\
 & \int_0 \dots \int_0 \dots \int_0 \dots \int_0 F(x_1 + v_1^{(1)} + \dots + v_{1_1-1}^{(1)}, \dots \\
 & \dots, x_{\hat{r}} + v_1^{(\hat{r})} + \dots + v_{1_{\hat{r}}-1}^{(\hat{r})}) dv_1^{(1)} \dots dv_{1_1-1}^{(1)} \dots dv_1^{(\hat{r})} \dots dv_{1_{\hat{r}}-1}^{(\hat{r})} =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{w_0}{R} \sum_{p=1}^P \frac{A_p}{(p-1)!} \int_0^{y_{1\hat{F}}^{(\hat{F})}} \dots \int_0^{y_1^{(\hat{F})}} \dots \int_0^{y_{1_1-1}^{(1)}} \dots \int_0^{y_1^{(1)}} \int_0^{x_{\hat{F}}+v_1^{(\hat{F})}+\dots+v_{1\hat{F}-1}^{(\hat{F})}} \dots \quad (30)$$

$$\begin{aligned} & \dots \int_0^{x_1+v_1^{(1)}+\dots+v_{1_1-1}^{(1)}} (\log u^{(1)} \dots u^{(\hat{F})})^{p-1} du^{(1)} \dots du^{(\hat{F})} \cdot \\ & \cdot dv_1^{(1)} \dots dv_{1_1-1}^{(1)} \dots dv_1^{(\hat{F})} \dots dv_{1\hat{F}-1}^{(\hat{F})} + \\ & + O\left(\prod_{p=1}^{\hat{F}} \left(x_p + y_1^{(p)} + \dots + y_{1_p-1}^{(p)}\right)^{z_0+1-p-1+\delta}\right) . \end{aligned}$$

Im Folgenden sei immer

$$\sum_{j=1}^{1_p-1} y_j^{(p)} < x_p, \quad p = 1, \dots, \hat{F}, \quad (31)$$

vorausgesetzt. Wegen der Monotonie von $F(x_1, \dots, x_{\hat{F}})$ in allen Variablen gilt offenbar

$$\begin{aligned} & \int_0^{y_{1\hat{F}}^{(\hat{F})}} \dots \int_0^{y_1^{(\hat{F})}} \dots \int_0^{y_{1_1-1}^{(1)}} \dots \int_0^{y_1^{(1)}} F\left(x_1 + \sum_{j=1}^{1_1-1} (v_j^{(1)} - y_j^{(1)}), \dots \right. \\ & \quad \left. \dots, x_{\hat{F}} + \sum_{j=1}^{1_{\hat{F}}-1} (v_j^{(\hat{F})} - y_j^{(\hat{F})})\right) dv_1^{(1)} \dots dv_{1_1-1}^{(1)} \dots dv_1^{(\hat{F})} \dots dv_{1\hat{F}-1}^{(\hat{F})} \\ & \leq y_1^{(1)} \dots y_{1_1-1}^{(1)} \dots y_1^{(\hat{F})} \dots y_{1\hat{F}-1}^{(\hat{F})} F(x_1, \dots, x_{\hat{F}}) \quad (32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \leq \int_0^{y_{1\hat{F}}^{(\hat{F})}} \dots \int_0^{y_1^{(\hat{F})}} \dots \int_0^{y_{1_1-1}^{(1)}} \dots \int_0^{y_1^{(1)}} F\left(x_1 + \sum_{j=1}^{1_1-1} v_j^{(1)}, \dots, x_{\hat{F}} + \sum_{j=1}^{1_{\hat{F}}-1} v_j^{(\hat{F})}\right) \cdot \\ & \quad \cdot dv_1^{(1)} \dots dv_{1_1-1}^{(1)} \dots dv_1^{(\hat{F})} \dots dv_{1\hat{F}-1}^{(\hat{F})} . \end{aligned}$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned}
 & y_1^{(1)} \dots y_{l_1-1}^{(1)} \dots y_1^{(\hat{r})} \dots y_{l_{\hat{r}}-1}^{(\hat{r})} \int_0^{x_{\hat{r}}+v_1^{(\hat{r})}+\dots+v_{l_{\hat{r}}-1}^{(\hat{r})}} \dots \\
 & \quad \inf_{\substack{0 \leq v_{j_p}^{(p)} \leq y_{j_p}^{(p)} \\ p=1, \dots, \hat{r} \\ j_p=1, \dots, l_p-1}} \\
 & \dots \int_0^{x_1+v_1^{(1)}+\dots+v_{l_1-1}^{(1)}} (\log u^{(1)} \dots u^{(\hat{r})})^{\rho-1} du^{(1)} \dots du^{(\hat{r})} \\
 & \leq \int_0^{y_{l_{\hat{r}}-1}^{(\hat{r})}} \dots \int_0^{y_1^{(\hat{r})}} \dots \int_0^{y_{l_1-1}^{(1)}} \dots \int_0^{y_1^{(1)}} \int_0^{x_{\hat{r}}+v_1^{(\hat{r})}+\dots+v_{l_{\hat{r}}-1}^{(\hat{r})}} \dots \\
 & \dots \int_0^{x_1+v_1^{(1)}+\dots+v_{l_1-1}^{(1)}} (\log u^{(1)} \dots u^{(\hat{r})})^{\rho-1} du^{(1)} \dots du^{(\hat{r})} \cdot \\
 & \quad \cdot dv_1^{(1)} \dots dv_{l_1-1}^{(1)} \dots dv_1^{(\hat{r})} \dots dv_{l_{\hat{r}}-1}^{(\hat{r})} \\
 & \leq y_1^{(1)} \dots y_{l_1-1}^{(1)} \dots y_1^{(\hat{r})} \dots y_{l_{\hat{r}}-1}^{(\hat{r})} \int_0^{x_{\hat{r}}+v_1^{(\hat{r})}+\dots+v_{l_{\hat{r}}-1}^{(\hat{r})}} \dots \\
 & \quad \sup_{\substack{0 \leq v_{j_p}^{(p)} \leq y_{j_p}^{(p)} \\ p=1, \dots, \hat{r} \\ j_p=1, \dots, l_p-1}} \\
 & \dots \int_0^{x_1+v_1^{(1)}+\dots+v_{l_1-1}^{(1)}} (\log u^{(1)} \dots u^{(\hat{r})})^{\rho-1} du^{(1)} \dots du^{(\hat{r})} ;
 \end{aligned}$$

da das Mehrfachintegral

$$\int_0^{x_{\hat{r}}+v_1^{(\hat{r})}+\dots+v_{1_{\hat{r}}-1}^{(\hat{r})}} \dots \int_0^{x_1+v_1^{(1)}+\dots+v_{1_1-1}^{(1)}} (\log u^{(1)} \dots u^{(\hat{r})})^{p-1} \cdot du^{(1)} \dots du^{(\hat{r})}$$

für $x_p > 0$ ($p=1, \dots, \hat{r}$) eine stetige Funktion von $(v_1^{(1)}, \dots$

$\dots, v_{1_1-1}^{(1)}, \dots, v_1^{(\hat{r})}, \dots, v_{1_{\hat{r}}-1}^{(\hat{r})}$) ist, gibt es Vektoren $(t_{m,1}^{(1)}, \dots$

$\dots, t_{m,1_1-1}^{(1)}, \dots, t_{m,1}^{(\hat{r})}, \dots, t_{m,1_{\hat{r}}-1}^{(\hat{r})}$), $m=1, 2$, mit

$$0 \leq t_{m,j_p}^{(p)} \leq y_{j_p}^{(p)}, \quad m=1, 2, \quad p=1, \dots, \hat{r}, \quad j_p=1, \dots, l_p, \quad (33)$$

so daß gilt:

$$\begin{aligned} & y_1^{(1)} \dots y_{1_1-1}^{(1)} \dots y_1^{(\hat{r})} \dots y_{1_{\hat{r}}-1}^{(\hat{r})} \int_0^{x_{\hat{r}}+t_{1,1}^{(\hat{r})}+\dots+t_{1,1_{\hat{r}}-1}^{(\hat{r})}} \dots \\ & \dots \int_0^{x_1+t_{1,1}^{(1)}+\dots+t_{1,1_1-1}^{(1)}} (\log u^{(1)} \dots u^{(\hat{r})})^{p-1} du^{(1)} \dots du^{(\hat{r})} \\ & \leq \int_0^{y_{1_{\hat{r}}-1}^{(\hat{r})}} \dots \int_0^{y_1^{(\hat{r})}} \dots \int_0^{y_{1_1-1}^{(1)}} \dots \int_0^{y_1^{(1)}} \int_0^{x_{\hat{r}}+v_1^{(\hat{r})}+\dots+v_{1_{\hat{r}}-1}^{(\hat{r})}} \dots \\ & \dots \int_0^{x_1+v_1^{(1)}+\dots+v_{1_1-1}^{(1)}} (\log u^{(1)} \dots u^{(\hat{r})})^{p-1} du^{(1)} \dots du^{(\hat{r})} \quad (34) \\ & \cdot dv_1^{(1)} \dots dv_{1_1-1}^{(1)} \dots dv_1^{(\hat{r})} \dots dv_{1_{\hat{r}}-1}^{(\hat{r})} \leq \end{aligned}$$

$$\leq y_1^{(1)} \dots y_{l_1-1}^{(1)} \dots y_1^{(\hat{r})} \dots y_{l_{\hat{r}}-1}^{(\hat{r})} \int_0^{x_{\hat{r}}+t_{2,1}^{(\hat{r})}+\dots+t_{2,l_{\hat{r}}-1}^{(\hat{r})}} \dots$$

$$\dots \int_0^{x_1+t_{2,1}^{(1)}+\dots+t_{2,l_1-1}^{(1)}} (\log u^{(1)} \dots u^{(\hat{r})})^{\rho-1} du^{(1)} \dots du^{(\hat{r})} .$$

Nach Hilfssatz 8b) ist für $m=1,2$

$$\int_0^{x_{\hat{r}}+t_{m,1}^{(\hat{r})}+\dots+t_{m,l_{\hat{r}}-1}^{(\hat{r})}} \dots \int_0^{x_1+t_{m,1}^{(1)}+\dots+t_{m,l_1-1}^{(1)}} (\log u^{(1)} \dots u^{(\hat{r})})^{\rho-1} .$$

$$\cdot du^{(1)} \dots du^{(\hat{r})}$$

$$= \left\{ \prod_{p=1}^{\hat{r}} \left(x_p + \sum_{j=1}^{l_p-1} t_{m,j}^{(p)} \right) \right\} \sum_{\kappa=0}^{\rho-1} (-1)^{\rho-1-\kappa} \frac{(\rho-1)!}{\kappa!} \binom{\rho-1-\kappa+r}{r} .$$

$$\cdot \left\{ \log \prod_{p=1}^{\hat{r}} \left(x_p + \sum_{j=1}^{l_p-1} t_{m,j}^{(p)} \right) \right\}^{\kappa}$$

$$= x_1 \dots x_{\hat{r}} \sum_{\kappa=0}^{\rho-1} (-1)^{\rho-1-\kappa} \frac{(\rho-1)!}{\kappa!} \binom{\rho-1-\kappa+r}{r} (\log x_1 \dots x_{\hat{r}})^{\kappa} +$$

$$+ x_1 \dots x_{\hat{r}} \sum_{\kappa=0}^{\rho-1} (-1)^{\rho-1-\kappa} \frac{(\rho-1)!}{\kappa!} \binom{\rho-1-\kappa+r}{r} .$$

$$\cdot \left\{ \left(\log \prod_{p=1}^{\hat{r}} \left(x_p + \sum_{j=1}^{l_p-1} t_{m,j}^{(p)} \right) \right)^{\kappa} - (\log x_1 \dots x_{\hat{r}})^{\kappa} \right\} +$$

$$+ \left\{ \prod_{p=1}^{\hat{r}} \left(x_p + \sum_{j=1}^{l_p-1} t_{m,j}^{(p)} \right) - x_1 \dots x_{\hat{r}} \right\} \sum_{\kappa=0}^{\rho-1} (-1)^{\rho-1-\kappa} \frac{(\rho-1)!}{\kappa!} .$$

$$\cdot \binom{\rho-1-\kappa+r}{r} \left\{ \log \prod_{p=1}^{\hat{r}} \left(x_p + \sum_{j=1}^{l_p-1} t_{m,j}^{(p)} \right) \right\}^{\kappa} .$$

Wegen der Voraussetzung (31) und wegen (33) ist hierin

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \frac{\hat{r}}{\prod_{p=1}^{\hat{r}}} \left(x_p + \sum_{j=1}^{\frac{1}{p}-1} t_{m,j}^{(p)} \right) - x_1 \cdots x_{\hat{r}} \right\} \sum_{\kappa=0}^{\rho-1} (-1)^{\rho-1-\kappa} \frac{(\rho-1)!}{\kappa!} \cdot \\
 & \quad \cdot \binom{\rho-1-\kappa+r}{r} \left\{ \log \frac{\hat{r}}{\prod_{p=1}^{\hat{r}}} \left(x_p + \sum_{j=1}^{\frac{1}{p}-1} t_{m,j}^{(p)} \right) \right\}^{\kappa} \\
 &= O \left(\sum_{p=1}^{\hat{r}} \frac{x_1 \cdots x_{\hat{r}}}{x_p} \sum_{j=1}^{\frac{1}{p}-1} t_{m,j}^{(p)} \cdot (x_1 \cdots x_{\hat{r}})^{\delta} \right) \\
 &= O \left((x_1 \cdots x_{\hat{r}})^{1+\delta} \sum_{p=1}^{\hat{r}} \frac{1}{x_p} \sum_{j=1}^{\frac{1}{p}-1} y_j^{(p)} \right)
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 & \left(\log \frac{\hat{r}}{\prod_{p=1}^{\hat{r}}} \left(x_p + \sum_{j=1}^{\frac{1}{p}-1} t_{m,j}^{(p)} \right) \right)^{\kappa} - (\log x_1 \cdots x_{\hat{r}})^{\kappa} \\
 &= \sum_{\lambda=1}^{\kappa} \left\{ \left(\log \frac{\hat{r}}{\prod_{p=1}^{\hat{r}}} \left(x_p + \sum_{j=1}^{\frac{1}{p}-1} t_{m,j}^{(p)} \right) \right)^{\kappa-\lambda+1} (\log x_1 \cdots x_{\hat{r}})^{\lambda-1} - \right. \\
 & \quad \left. - \left(\log \frac{\hat{r}}{\prod_{p=1}^{\hat{r}}} \left(x_p + \sum_{j=1}^{\frac{1}{p}-1} t_{m,j}^{(p)} \right) \right)^{\kappa-\lambda} (\log x_1 \cdots x_{\hat{r}})^{\lambda} \right\} \\
 &= \sum_{\lambda=1}^{\kappa} \left(\log \frac{\hat{r}}{\prod_{p=1}^{\hat{r}}} \left(x_p + \sum_{j=1}^{\frac{1}{p}-1} t_{m,j}^{(p)} \right) \right)^{\kappa-\lambda} (\log x_1 \cdots x_{\hat{r}})^{\lambda-1} \cdot \\
 & \quad \log \frac{\hat{r}}{\prod_{p=1}^{\hat{r}}} \left(1 + \frac{1}{x_p} \sum_{j=1}^{\frac{1}{p}-1} t_{m,j}^{(p)} \right) \\
 &= O \left((x_1 \cdots x_{\hat{r}})^{\delta} \log \frac{\hat{r}}{\prod_{p=1}^{\hat{r}}} \left(1 + \frac{1}{x_p} \sum_{j=1}^{\frac{1}{p}-1} t_{m,j}^{(p)} \right) \right)
 \end{aligned}$$

$$= O\left((x_1 \cdots x_{\hat{r}})^{\delta} \sum_{p=1}^{\hat{r}} \frac{1}{x_p} \sum_{j=1}^{l_p-1} y_j^{(p)}\right) .$$

Es folgt somit für $m=1,2$:

$$\begin{aligned} & x_{\hat{r}}^{t_{m,1}^{(\hat{r})} + \dots + t_{m, l_{\hat{r}}-1}^{(\hat{r})}} x_1^{t_{m,1}^{(1)} + \dots + t_{m, l_1-1}^{(1)}} \\ & \int_0 \dots \int_0 (\log u^{(1)} \dots u^{(\hat{r})})^{\rho-1} \cdot du^{(1)} \dots du^{(\hat{r})} \\ & = x_1 \cdots x_{\hat{r}} \sum_{\kappa=0}^{\rho-1} (-1)^{\rho-1-\kappa} \frac{(\rho-1)!}{\kappa!} \binom{\rho-1-\kappa+r}{r} (\log x_1 \cdots x_{\hat{r}})^{\kappa} + \quad (35) \\ & + O\left((x_1 \cdots x_{\hat{r}})^{1+\delta} \sum_{p=1}^{\hat{r}} \frac{1}{x_p} \sum_{j=1}^{l_p-1} y_j^{(p)}\right) . \end{aligned}$$

Aus (34) und (35) erhält man

$$\begin{aligned} & \frac{1}{y_1^{(1)} \dots y_{l_1-1}^{(1)} \dots y_1^{(\hat{r})} \dots y_{l_{\hat{r}}-1}^{(\hat{r})}} \int_0^{y_{l_{\hat{r}}-1}^{(\hat{r})}} \dots \int_0^{y_1^{(\hat{r})}} \dots \int_0^{y_{l_1-1}^{(1)}} \dots \int_0^{y_1^{(1)}} . \\ & \cdot \int_0^{x_{\hat{r}}+v_1^{(\hat{r})} + \dots + v_{l_{\hat{r}}-1}^{(\hat{r})}} \dots \int_0^{x_1+v_1^{(1)} + \dots + v_{l_1-1}^{(1)}} (\log u^{(1)} \dots u^{(\hat{r})})^{\rho-1} \cdot \\ & \cdot du^{(1)} \dots du^{(\hat{r})} dv_1^{(1)} \dots dv_{l_1-1}^{(1)} \dots dv_1^{(\hat{r})} \dots dv_{l_{\hat{r}}-1}^{(\hat{r})} \\ & = x_1 \cdots x_{\hat{r}} \sum_{\kappa=0}^{\rho-1} (-1)^{\rho-1-\kappa} \frac{(\rho-1)!}{\kappa!} \binom{\rho-1-\kappa+r}{r} (\log x_1 \cdots x_{\hat{r}})^{\kappa} + \\ & + O\left((x_1 \cdots x_{\hat{r}})^{1+\delta} \sum_{p=1}^{\hat{r}} \frac{1}{x_p} \sum_{j=1}^{l_p-1} y_j^{(p)}\right) ; \end{aligned}$$

in (30) eingesetzt, ergibt dies

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{y_1^{(1)} \dots y_{l_1-1}^{(1)} \dots y_1^{(\hat{r})} \dots y_{l_{\hat{r}}-1}^{(\hat{r})}} \int_0^{y_{l_{\hat{r}}-1}^{(\hat{r})}} \dots \int_0^{y_1^{(\hat{r})}} \dots \int_0^{y_{l_1-1}^{(1)}} \dots \int_0^{y_1^{(1)}} \cdot \\
 & \cdot F \left(x_1 + \sum_{j=1}^{l_1-1} v_j^{(1)}, \dots, x_{\hat{r}} + \sum_{j=1}^{l_{\hat{r}}-1} v_j^{(\hat{r})} \right) dv_1^{(1)} \dots dv_{l_1-1}^{(1)} \dots \\
 & \dots dv_1^{(\hat{r})} \dots dv_{l_{\hat{r}}-1}^{(\hat{r})} \\
 & = x_1 \dots x_{\hat{r}} \frac{w_0}{R} \sum_{\rho=1}^P A_{\rho} \sum_{\kappa=0}^{\rho-1} (-1)^{\rho-1-\kappa} \frac{1}{\kappa!} \binom{\rho-1-\kappa+r}{r} (\log x_1 \dots x_{\hat{r}})^{\kappa} + \\
 & + O \left((x_1 \dots x_{\hat{r}})^{1+\delta} \sum_{p=1}^{\hat{r}} \frac{1}{x_p} \sum_{j=1}^{l_p-1} y_j^{(p)} \right) + O \left(\prod_{p=1}^{\hat{r}} \frac{x_p^{z_0+1} p^{-1+\delta}}{y_1^{(p)} \dots y_{l_p-1}^{(p)}} \right);
 \end{aligned}$$

analoge Überlegungen ergeben

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{y_1^{(1)} \dots y_{l_1-1}^{(1)} \dots y_1^{(\hat{r})} \dots y_{l_{\hat{r}}-1}^{(\hat{r})}} \int_0^{y_{l_{\hat{r}}-1}^{(\hat{r})}} \dots \int_0^{y_1^{(\hat{r})}} \dots \int_0^{y_{l_1-1}^{(1)}} \dots \int_0^{y_1^{(1)}} \cdot \\
 & \cdot F \left(x_1 + \sum_{j=1}^{l_1-1} (v_j^{(1)} - y_j^{(1)}), \dots, x_{\hat{r}} + \sum_{j=1}^{l_{\hat{r}}-1} (v_j^{(\hat{r})} - y_j^{(\hat{r})}) \right) \cdot \\
 & \cdot dv_1^{(1)} \dots dv_{l_1-1}^{(1)} \dots dv_1^{(\hat{r})} \dots dv_{l_{\hat{r}}-1}^{(\hat{r})} \\
 & = x_1 \dots x_{\hat{r}} \frac{w_0}{R} \sum_{\rho=1}^P A_{\rho} \sum_{\kappa=0}^{\rho-1} (-1)^{\rho-1-\kappa} \frac{1}{\kappa!} \binom{\rho-1-\kappa+r}{r} (\log x_1 \dots x_{\hat{r}})^{\kappa} + \\
 & + O \left((x_1 \dots x_{\hat{r}})^{1+\delta} \sum_{p=1}^{\hat{r}} \frac{1}{x_p} \sum_{j=1}^{l_p-1} y_j^{(p)} \right) + O \left(\prod_{p=1}^{\hat{r}} \frac{x_p^{z_0+1} p^{-1+\delta}}{y_1^{(p)} \dots y_{l_p-1}^{(p)}} \right);
 \end{aligned}$$

hierbei ist im Hinblick auf die zu (34) analoge Ungleichung lediglich zu beachten, daß wegen der Voraussetzung (31) für $p=1, \dots, \hat{p}$ gilt:

$$x_p - \sum_{j=1}^{p-1} y_j^{(p)} > 0.$$

Somit erhält man aus (32):

$$\begin{aligned} & F(x_1, \dots, x_{\hat{p}}) \\ &= x_1 \cdots x_{\hat{p}} \frac{w_0}{R} \sum_{\kappa=0}^{P-1} \sum_{\rho=\kappa+1}^P A_{\rho} (-1)^{\rho-1-\kappa} \frac{1}{\kappa!} \binom{\rho-1-\kappa+r}{r} (\log x_1 \cdots x_{\hat{p}})^{\kappa} + \\ &+ O\left((x_1 \cdots x_{\hat{p}})^{1+\delta} \sum_{p=1}^{\hat{p}} \frac{1}{x_p} \sum_{j=1}^{p-1} y_j^{(p)}\right) + O\left(\frac{\hat{p}}{\prod_{p=1}^{\hat{p}} y_1^{(p)} \cdots y_{l_1-1}^{(p)}} \frac{x_0^{z_0+1} p^{-1+\delta}}{y_1^{(p)} \cdots y_{l_1-1}^{(p)}}\right). \quad (36) \end{aligned}$$

Das günstigste Ergebnis erzielt man mit

$$\begin{aligned} \frac{y_1^{(1)}}{x_1} &= \dots = \frac{y_{l_1-1}^{(1)}}{x_1} = \dots = \frac{y_1^{(\hat{p})}}{x_{\hat{p}}} = \dots = \frac{y_{l_{\hat{p}}-1}^{(\hat{p})}}{x_{\hat{p}}} = \\ &= (x_1 \cdots x_{\hat{p}})^{-1} \left(\sum_{p=1}^{\hat{p}} (l_p - 1) + 1 \right)^{-1} \cdot (1 - z_0)^{-1}; \end{aligned}$$

diese Wahl ist möglich, da wegen $z_0 < 1$ für hinreichend großes $x_1 \cdots x_{\hat{p}}$ die Bedingung (31) erfüllt ist. Setzt man nun die so gewählten $y_1^{(1)}, \dots, y_{l_1-1}^{(1)}, \dots, y_1^{(\hat{p})}, \dots, y_{l_{\hat{p}}-1}^{(\hat{p})}$ in (36) ein, so ergibt sich die Behauptung des Hilfssatzes für hinreichend großes $x_1 \cdots x_{\hat{p}}$, etwa für $x_1 \cdots x_{\hat{p}} > X$.

Zur Vervollständigung des Beweises wird jetzt noch gezeigt, daß es eine positive Konstante c_{17} gibt, so daß für $x_1, \dots, x_{\hat{p}} > 0$ mit $x_1 \cdots x_{\hat{p}} \leq X$ gilt:

$$F(x_1, \dots, x_{\hat{r}}) \leq c_{17} \quad .$$

Wie beim Beweis der Periodizität von $G(x_1(n), \dots, x_{\hat{r}}(n), 1)$ in den Variablen $v_1, \dots, v_r$ sieht man, daß auch die Funktion $F(x_1(n), \dots, x_{\hat{r}}(n)) = G\left(\frac{1}{x_1(n)}, \dots, \frac{1}{x_{\hat{r}}(n)}, (1, \dots, 1)^T\right)$ periodisch in jedem v_l ($l=1, \dots, r$) mit der Periode 1 ist. Für $f \in \mathbb{Z}^r$ gilt somit:

$$F(x_1(n+f), \dots, x_{\hat{r}}(n+f)) = F(x_1(n), \dots, x_{\hat{r}}(n)) \quad . \quad (37)$$

Sei

$$v_0 = \begin{pmatrix} v_{0,1} \\ \vdots \\ v_{0,r} \end{pmatrix}$$

ein beliebig, aber fest gewählter Vektor.

Seien nun $x_1^*, \dots, x_{\hat{r}}^* > 0$ mit $x_1^* \cdots x_{\hat{r}}^* \leq X$ beliebig vorgegeben, und seien hierzu u^* und

$$v^* = \begin{pmatrix} v_1^* \\ \vdots \\ v_r^* \end{pmatrix}$$

gemäß (1) bestimmt:

$$x_p^* = x_p(u^*, v^*) = u^{*e_p} \exp\{v^{*T} \eta_j^{(p)}\} \quad , \quad p = 1, \dots, \hat{r} \quad .$$

Wegen

$$u^{*n} = \prod_{p=1}^{\hat{r}} x_p^* \leq X \quad , \quad \text{also} \quad u^* \leq \sqrt[n]{X} \quad ,$$

und der wachsenden Monotonie von F bzgl. jeder der Variablen $x_1, \dots, x_{\hat{r}}$ gilt:

$$F(x_1(u^*, v^*), \dots, x_{\hat{r}}(u^*, v^*)) \leq F(x_1(\sqrt[n]{X}, v^*), \dots, x_{\hat{r}}(\sqrt[n]{X}, v^*)) \quad . \quad (38)$$

Da $F(x_1(\frac{n}{\sqrt{X}}, n), \dots, x_{\hat{r}}(\frac{n}{\sqrt{X}}, n))$ auf der Menge

$$M := \{n \mid |n - n_0| \leq \sqrt{r}\}$$

beschränkt ist, gibt es eine Konstante c_{17} mit

$$F(x_1(\frac{n}{\sqrt{X}}, n), \dots, x_{\hat{r}}(\frac{n}{\sqrt{X}}, n)) \leq c_{17} \quad \text{für alle } n \in M. \quad (39)$$

Setzt man jetzt speziell

$$f^* := \begin{pmatrix} h_1^* \\ \vdots \\ h_r^* \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad h_l^* := [v_{0,1} - v_l^*], \quad l = 1, \dots, r,$$

so gilt:

$$\begin{aligned} |n^* + f^* - n_0|^2 &= \sum_{l=1}^r (v_l^* + [v_{0,1} - v_l^*] - v_{0,1})^2 \\ &= \sum_{l=1}^r (v_{0,1} - v_l^* - [v_{0,1} - v_l^*])^2 \leq \sum_{l=1}^r 1 = r, \end{aligned}$$

also $n^* + f^* \in M$. Somit folgt aus (37), (38), (39):

$$\begin{aligned} F(x_1(u^*, n^*), \dots, x_{\hat{r}}(u^*, n^*)) &\leq F(x_1(\frac{n}{\sqrt{X}}, n^*), \dots, x_{\hat{r}}(\frac{n}{\sqrt{X}}, n^*)) \\ &= F(x_1(\frac{n}{\sqrt{X}}, n^* + f^*), \dots, x_{\hat{r}}(\frac{n}{\sqrt{X}}, n^* + f^*)) \leq c_{17}. \end{aligned}$$

Korollar 3: Die Funktionen $f(\gamma)$, $\phi_m(s)$ mögen den Voraussetzungen von Hilfssatz 7 mit $z_0 < 1$ und $z_1 = 1$ genügen; ferner sei $f(\gamma) \geq 0$ für alle ganzen Zahlen $\gamma \in K$; darüber hinaus gelte: $\lambda(z_1 - z_0) \leq 1/2$. Die Funktion $\phi_{\mathcal{V}}(s)$ habe im Punkte $z_1 = 1$ einen Pol der Ordnung $P \geq 1$. Dann gilt in den Bezeichnungen von Hilfssatz 9 für $\hat{r} \geq 2$, $x_1, \dots, x_{\hat{r}} > 0$ und für jedes $\delta > 0$:

$$F(x_1, \dots, x_{\hat{r}}) = x_1 \cdots x_{\hat{r}} \frac{w_0}{R} \sum_{\kappa=0}^{P-1} B_{\kappa} (\log x_1 \cdots x_{\hat{r}})^{\kappa} +$$

$$+ O\left((x_1 \cdots x_{\hat{r}})^{1 - \frac{1-z_0}{r+1} + \delta}\right) .$$

Beweis: Wegen $\lambda(z_1 - z_0) \leq 1/2$ ist in Hilfssatz 9 $l_1 = \dots = l_{\hat{r}} = 2$.

Bemerkung: Korollar 3 läßt sich aus Korollar 2 anstelle von Hilfssatz 7 herleiten.

§4 Anwendungen

1. Für $k \geq 2$, $\mathfrak{a}_\kappa \in \mathfrak{f}_j$, $\kappa=1, \dots, k$, und für ganze Ideale $\mathfrak{a} \neq (0)$ sei

$$d_{\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_k}(\mathfrak{a}) := \sum_{\substack{(\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_k) \\ \mathfrak{b}_\kappa \in \mathfrak{a}_\kappa, \kappa=1, \dots, k \\ \mathfrak{b}_1 \dots \mathfrak{b}_k = \mathfrak{a}}} 1, \quad d_k(\mathfrak{a}) := \sum_{\substack{(\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_k) \\ \mathfrak{b}_1 \dots \mathfrak{b}_k = \mathfrak{a}}} 1.$$

Es ist also $d_{\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_k}(\mathfrak{a})$ die Anzahl derjenigen Zerlegungen von $\mathfrak{a}$ in k Faktoren, in denen der κ -te Faktor der Idealklasse $\mathfrak{a}_\kappa$ angehört ($\kappa=1, \dots, k$), während $d_k(\mathfrak{a})$ die Anzahl aller Zerlegungen von $\mathfrak{a}$ in k Faktoren bezeichnet. Dabei werden auch solche Zerlegungen, die sich nur durch die Reihenfolge der Faktoren unterscheiden, als verschieden angesehen. Offenbar gilt:

$$d_k(\mathfrak{a}) = \sum_{(\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_k)} d_{\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_k}(\mathfrak{a}), \quad \mathfrak{a}_\kappa \in \mathfrak{f}_j, \kappa=1, \dots, k$$

Wegen der eindeutigen Zuordnung zwischen der Menge der ganzen Ideale von K und der Menge der von ganzen idealen Zahlen erzeugten Hauptideale gilt, falls $(\hat{\mathfrak{a}})$ das dem Ideal $\mathfrak{a}$ zugeordnete Hauptideal und $\hat{\mathfrak{a}}$ die der Idealklasse $\mathfrak{a}$ zugeordnete Hauptidealklasse ist,

$$d_{\hat{\mathfrak{a}}_1, \dots, \hat{\mathfrak{a}}_k}(\hat{\mathfrak{a}}) := \sum_{\substack{((\hat{\mathfrak{b}}_1), \dots, (\hat{\mathfrak{b}}_k)) \\ (\hat{\mathfrak{b}}_\kappa) \in \hat{\mathfrak{a}}_\kappa, \kappa=1, \dots, k \\ (\hat{\mathfrak{b}}_1 \dots \hat{\mathfrak{b}}_k) = (\hat{\mathfrak{a}})}} 1 = d_{\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_k}(\mathfrak{a}),$$

$$d_k(\hat{\mathfrak{a}}) := \sum_{\substack{((\hat{\mathfrak{b}}_1), \dots, (\hat{\mathfrak{b}}_k)) \\ (\hat{\mathfrak{b}}_1 \dots \hat{\mathfrak{b}}_k) = (\hat{\mathfrak{a}})}} 1 = d_k(\mathfrak{a}).$$

Bezeichnet $\hat{\mathcal{Q}}_0$ die Hauptklasse von $\hat{f}_j$, so sei für $k \geq 2$, $\hat{\mathcal{Q}}_k \in \hat{f}_j$ ($k=1, \dots, k$) mit $\hat{\mathcal{Q}}_1 \dots \hat{\mathcal{Q}}_k = \hat{\mathcal{Q}}_0$ und für $\sigma > 1$

$$\phi_m(s; \hat{\mathcal{Q}}_1, \dots, \hat{\mathcal{Q}}_k) := \sum_{\gamma} \frac{d_{\hat{\mathcal{Q}}_1, \dots, \hat{\mathcal{Q}}_k}^{(\gamma)}}{N(\gamma)^s} \exp\{m^T \text{Eg}(\gamma)\} ;$$

der durch den Strich am Summenzeichen ausgedrückten Summationsvorschrift und der Definition der Zahlen $e_p, e_p^{(q)}$ sollen in diesem und im nächsten § immer die durch (10) definierten Einheiten zugrunde liegen; das bedeutet insbesondere, daß in der obigen Reihe die Summation über ein volles System ganzer total positiver nicht assoziierter Zahlen aus K zu erstrecken ist.

Mit Hilfssatz 3 erhält man für die Funktionen $\phi_m(s; \hat{\mathcal{Q}}_1, \dots, \hat{\mathcal{Q}}_k)$ für $\sigma > 1$ die Darstellung

$$\phi_m(s; \hat{\mathcal{Q}}_1, \dots, \hat{\mathcal{Q}}_k) = \frac{1}{2^{r_1-1}} t_{Q+2, \dots, t_{r_1}} = 0, 1 \prod_{\kappa=1}^k \tau_m(s, \hat{\mathcal{Q}}_{\kappa}, 4) . \quad (40)$$

Hierzu ist wegen Hilfssatz 3 nur zu zeigen:

$$\prod_{\kappa=1}^k \tau_m(s, \hat{\mathcal{Q}}_{\kappa}, 4) = \sum_{(\gamma) \in \hat{\mathcal{Q}}_0} \frac{d_{\hat{\mathcal{Q}}_1, \dots, \hat{\mathcal{Q}}_k}^{(\gamma)}}{N(\gamma)^s} \lambda_m((\gamma), 4) . \quad (41)$$

Durch Induktion nach k wird für beliebige Klassen $\hat{\mathcal{Q}}_{\kappa} \in \hat{f}_j$ ($\kappa=1, \dots, k$) gezeigt:

$$\prod_{\kappa=1}^k \tau_m(s, \hat{\mathcal{Q}}_{\kappa}, 4) = \sum_{(\hat{\gamma}) \in \hat{\mathcal{Q}}_1 \dots \hat{\mathcal{Q}}_k} \frac{d_{\hat{\mathcal{Q}}_1, \dots, \hat{\mathcal{Q}}_k}^{(\hat{\gamma})}}{N(\hat{\gamma})^s} \lambda_m((\hat{\gamma}), 4) ; \quad (42)$$

speziell für $\hat{\mathcal{Q}}_1 \dots \hat{\mathcal{Q}}_k = \hat{\mathcal{Q}}_0$ folgt hieraus dann (41). Für $k=2$ ist

$$\tau_m(s, \hat{\mathcal{Q}}_1, 4) \tau_m(s, \hat{\mathcal{Q}}_2, 4) = \sum_{(\hat{\alpha}) \in \hat{\mathcal{Q}}_1} \frac{\lambda_m((\hat{\alpha}), 4)}{N(\hat{\alpha})^s} \sum_{(\hat{\beta}) \in \hat{\mathcal{Q}}_2} \frac{\lambda_m((\hat{\beta}), 4)}{N(\hat{\beta})^s}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{(\hat{\alpha}) \in \hat{\mathfrak{d}}_1} \sum_{(\hat{\beta}) \in \hat{\mathfrak{d}}_2} \frac{\lambda_{\mathfrak{m}}((\hat{\alpha}\hat{\beta}), 4)}{N(\hat{\alpha}\hat{\beta})^S} = \sum_{(\hat{\gamma}) \in \hat{\mathfrak{d}}_1 \cdot \hat{\mathfrak{d}}_2} \frac{\lambda_{\mathfrak{m}}((\hat{\gamma}), 4)}{N(\hat{\gamma})^S} \sum_{\substack{((\hat{\alpha}), (\hat{\beta})) \\ (\hat{\alpha}) \in \hat{\mathfrak{d}}_1, (\hat{\beta}) \in \hat{\mathfrak{d}}_2 \\ (\hat{\alpha}\hat{\beta}) = (\hat{\gamma})}} 1 \\
 &= \sum_{(\hat{\gamma}) \in \hat{\mathfrak{d}}_1 \cdot \hat{\mathfrak{d}}_2} \frac{d_{\hat{\mathfrak{d}}_1, \hat{\mathfrak{d}}_2}^{(\hat{\gamma})}}{N(\hat{\gamma})^S} \lambda_{\mathfrak{m}}((\hat{\gamma}), 4) ;
 \end{aligned}$$

sei also (42) für ein $k \geq 2$ vorausgesetzt; dann folgt:

$$\begin{aligned}
 \prod_{\kappa=1}^{k+1} \tau_{\mathfrak{m}}(s, \hat{\mathfrak{d}}_{\kappa}, 4) &= \left\{ \prod_{\kappa=1}^k \tau_{\mathfrak{m}}(s, \hat{\mathfrak{d}}_{\kappa}, 4) \right\} \cdot \tau_{\mathfrak{m}}(s, \hat{\mathfrak{d}}_{k+1}, 4) \\
 &= \sum_{(\hat{\alpha}) \in \hat{\mathfrak{d}}_1 \dots \hat{\mathfrak{d}}_k} \frac{d_{\hat{\mathfrak{d}}_1, \dots, \hat{\mathfrak{d}}_k}^{(\hat{\alpha})}}{N(\hat{\alpha})^S} \lambda_{\mathfrak{m}}((\hat{\alpha}), 4) \sum_{(\hat{\beta}) \in \hat{\mathfrak{d}}_{k+1}} \frac{\lambda_{\mathfrak{m}}((\hat{\beta}), 4)}{N(\hat{\beta})^S} \\
 &= \sum_{(\hat{\alpha}) \in \hat{\mathfrak{d}}_1 \dots \hat{\mathfrak{d}}_k} \sum_{(\hat{\beta}) \in \hat{\mathfrak{d}}_{k+1}} \frac{d_{\hat{\mathfrak{d}}_1, \dots, \hat{\mathfrak{d}}_k}^{(\hat{\alpha})}}{N(\hat{\alpha}\hat{\beta})^S} \lambda_{\mathfrak{m}}((\hat{\alpha}\hat{\beta}), 4) \\
 &= \sum_{(\hat{\gamma}) \in \hat{\mathfrak{d}}_1 \dots \hat{\mathfrak{d}}_k \cdot \hat{\mathfrak{d}}_{k+1}} \frac{\lambda_{\mathfrak{m}}((\hat{\gamma}), 4)}{N(\hat{\gamma})^S} \sum_{\substack{((\hat{\alpha}), (\hat{\beta})) \\ (\hat{\alpha}) \in \hat{\mathfrak{d}}_1 \dots \hat{\mathfrak{d}}_k, (\hat{\beta}) \in \hat{\mathfrak{d}}_{k+1} \\ (\hat{\alpha}\hat{\beta}) = (\hat{\gamma})}} d_{\hat{\mathfrak{d}}_1, \dots, \hat{\mathfrak{d}}_k}^{(\hat{\alpha})} \\
 &= \sum_{(\hat{\gamma}) \in \hat{\mathfrak{d}}_1 \dots \hat{\mathfrak{d}}_{k+1}} \frac{d_{\hat{\mathfrak{d}}_1, \dots, \hat{\mathfrak{d}}_{k+1}}^{(\hat{\gamma})}}{N(\hat{\gamma})^S} \lambda_{\mathfrak{m}}((\hat{\gamma}), 4) ,
 \end{aligned}$$

denn es ist

$$\begin{aligned}
 &\sum_{\substack{((\hat{\alpha}), (\hat{\beta})) \\ (\hat{\alpha}) \in \hat{\mathfrak{d}}_1 \dots \hat{\mathfrak{d}}_k, (\hat{\beta}) \in \hat{\mathfrak{d}}_{k+1} \\ (\hat{\alpha}\hat{\beta}) = (\hat{\gamma})}} d_{\hat{\mathfrak{d}}_1, \dots, \hat{\mathfrak{d}}_k}^{(\hat{\alpha})} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{\substack{((\hat{\alpha}), (\hat{\beta})) \\ (\hat{\alpha}) \in \hat{\mathfrak{A}}_1 \dots \hat{\mathfrak{A}}_k, (\hat{\beta}) \in \hat{\mathfrak{A}}_{k+1} \\ (\hat{\alpha}\hat{\beta}) = (\hat{\gamma})}} \sum_{\substack{((\hat{\alpha}_1), \dots, (\hat{\alpha}_k)) \\ (\hat{\alpha}_\kappa) \in \hat{\mathfrak{A}}_\kappa, \kappa=1, \dots, k \\ (\hat{\alpha}_1 \dots \hat{\alpha}_k) = (\hat{\alpha})}} 1 \\
 &= \sum_{\substack{((\hat{\alpha}_1), \dots, (\hat{\alpha}_k), (\hat{\beta})) \\ (\hat{\alpha}_\kappa) \in \hat{\mathfrak{A}}_\kappa, \kappa=1, \dots, k \\ (\hat{\beta}) \in \hat{\mathfrak{A}}_{k+1} \\ (\hat{\alpha}_1 \dots \hat{\alpha}_k \hat{\beta}) = (\hat{\gamma})}} 1 = d_{\hat{\mathfrak{A}}_1, \dots, \hat{\mathfrak{A}}_{k+1}}(\hat{\alpha}) .
 \end{aligned}$$

Aus (40) folgt mit Hilfssatz 6, daß die Funktionen $\phi_{\mathfrak{M}}(s; \hat{\mathfrak{A}}_1, \dots, \hat{\mathfrak{A}}_k)$ für $\mathfrak{M} \neq \mathcal{O}$ im Streifen S_ρ , $0 < \rho \leq 1/2$, der folgenden Ungleichung genügen:

$$|\phi_{\mathfrak{M}}(s; \hat{\mathfrak{A}}_1, \dots, \hat{\mathfrak{A}}_k)| \leq c_3^{k(\rho)} \left\{ \frac{\hat{\mathfrak{r}}}{\prod_{p=1}^k} |1+s-iE_p(\mathfrak{M})| e_p \right\}^{\frac{k}{2}(1+\rho-\sigma)} ;$$

für $|t| \geq t_0 > 0$ genügt auch die Funktion $\phi_{\mathfrak{M}}(s; \hat{\mathfrak{A}}_1, \dots, \hat{\mathfrak{A}}_k)$ dieser Ungleichung.

Ferner gilt, wie man durch Induktion nach k leicht sieht, für jedes $c > 0$

$$d_k(\gamma) = \mathcal{O}(N(\gamma)^c) , \quad (43)$$

also auch

$$d_{\hat{\mathfrak{A}}_1, \dots, \hat{\mathfrak{A}}_k}(\gamma) = \mathcal{O}(N(\gamma)^c) ;$$

daher ist die Funktion $d_{\hat{\mathfrak{A}}_1, \dots, \hat{\mathfrak{A}}_k}(\gamma) N(\gamma)^{-c}$ für jedes $c > 0$ auf

der Menge der von 0 verschiedenen ganzen Zahlen von K beschränkt.

Hieraus entnimmt man unter Beachtung von Hilfssatz 5a), daß die Funktionen $\phi_m(s; \hat{q}_1, \dots, \hat{q}_k)$ die Voraussetzungen von Hilfssatz 9 mit $c_0 = z_0 = 0$, $z_1 = 1$, $\lambda = k/2$, $c_{10}(\rho) = c_3^k(\rho)$ und $P = k$ erfüllen. Hilfssatz 9 liefert somit Teil a) des folgenden Satzes, aus dem Teil b) unmittelbar folgt.

Satz 3: Für $k \geq 2$, $\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_k \in \mathcal{H}$ mit $\hat{q}_1 \cdots \hat{q}_k = \hat{q}_0$, für $\hat{r} \geq 2$ und $x_1, \dots, x_{\hat{r}} > 0$ sei

$$D_{\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_k}(x_1, \dots, x_{\hat{r}}) := \sum_{\gamma > 0} d_{\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_k}(\gamma) \cdot 0 < |\gamma^{(h)}|^{e_h} x_h$$

$$D_k(x_1, \dots, x_{\hat{r}}) := \sum_{\gamma > 0} d_k(\gamma) \cdot 0 < |\gamma^{(h)}|^{e_h} x_h$$

Dann gilt für $x_1, \dots, x_{\hat{r}} > 0$ und für jedes $\delta > 0$:

$$\begin{aligned} \text{a) } D_{\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_k}(x_1, \dots, x_{\hat{r}}) &= x_1 \cdots x_{\hat{r}} \frac{w_0}{R} \sum_{\kappa=0}^{k-1} B_{\kappa, k}(\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_k) \cdot \\ &\cdot (\log x_1 \cdots x_{\hat{r}})^{\kappa} + O\left((x_1 \cdots x_{\hat{r}})^{1 - \frac{1}{\langle k/2 \rangle r_1 + k r_2 + 1} + \delta}\right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } D_k(x_1, \dots, x_{\hat{r}}) &= x_1 \cdots x_{\hat{r}} \frac{w_0}{R} \sum_{\kappa=0}^{k-1} B_{\kappa, k}(\log x_1 \cdots x_{\hat{r}})^{\kappa} + \\ &+ O\left((x_1 \cdots x_{\hat{r}})^{1 - \frac{1}{\langle k/2 \rangle r_1 + k r_2 + 1} + \delta}\right). \end{aligned}$$

Darin wurde

$$\langle y \rangle := \min\{g \in \mathbb{Z} \mid g \geq y\},$$

$$B_{\kappa, k}(\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_k) := \frac{1}{\kappa!} \sum_{\rho=\kappa+1}^k (-1)^{\rho-1-\kappa} \binom{r+\rho-1-\kappa}{r} A_{\rho}(\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_k),$$

$$B_{\kappa,k} := \sum_{\substack{(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_k) \\ \hat{a}_1 \cdots \hat{a}_k = \hat{a}_0}} B_{\kappa,k}^{(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_k)}$$

gesetzt, die $A_p^{(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_k)}$ bezeichnen die Koeffizienten des Hauptteils der Laurent-Entwicklung von $\phi_{\mathcal{O}}(s; \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_k)$ um den Punkt $s=1$ und R den Regulator der Einheiten aus (10). Die höchsten Koeffizienten in a) und b) lauten mit h als Klassenzahl von K

$$\frac{w_{\mathcal{O}}}{R} B_{k-1,k}^{(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_k)} = \frac{(2\pi)^{r_2}}{|\sqrt{d}|} \frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{2^{r_1} (2\pi)^{r_2 R_{\mathcal{O}}}}{w |\sqrt{d}|} \right)^{k-1}$$

bzw.

$$\frac{w_{\mathcal{O}}}{R} B_{k-1,k} = \frac{(2\pi)^{r_2}}{|\sqrt{d}|} \frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{2^{r_1} (2\pi)^{r_2 R_{\mathcal{O}} h}}{w |\sqrt{d}|} \right)^{k-1}.$$

Beweis: Abgesehen von der Berechnung der höchsten Koeffizienten ist lediglich noch zu beachten, daß in Hilfssatz 9 $1_p = \langle e_p^{k/2} \rangle + 1$, $p=1, \dots, \hat{r}$, gilt, also:

$$\sum_{p=1}^{\hat{r}} (1_p - 1) = \sum_{p=1}^{\hat{r}} \langle e_p^{k/2} \rangle = \langle \frac{k}{2} \rangle_{r_1 + k r_2}.$$

Nach (40) und Hilfssatz 5a) ist nun

$$\begin{aligned} \phi_{\mathcal{O}}(s; \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_k) &= \frac{1}{2^{r_1 - Q - 1}} \sum_{t_{Q+2}, \dots, t_{r_1} = 0, 1} \prod_{\kappa=1}^k \zeta_{\mathcal{O}}(s, \hat{a}_{\kappa}, t_{\kappa}) \\ &= \frac{1}{2^{r_1 - Q - 1}} \prod_{\kappa=1}^k \zeta_{\mathcal{O}}(s, \hat{a}_{\kappa}, 0) + \sum_{t_{Q+2}, \dots, t_{r_1} = 0, 1} \prod_{\kappa=1}^k \zeta_{\mathcal{O}}(s, \hat{a}_{\kappa}, t_{\kappa}) \\ &\quad 4 \neq 0 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{r_1^{Q-1}} \prod_{\kappa=1}^k \left(\frac{2^{r_1(2\pi)} r_{2R_0}}{w|\sqrt{d}|} \frac{1}{s-1} + f(s, \hat{Q}_\kappa) \right) + g(s)$$

mit ganzen Funktionen $f(s, \hat{Q}_\kappa)$ und $g(s)$. Hieraus entnimmt man

$$\begin{aligned} A_k^{(\hat{Q}_1, \dots, \hat{Q}_k)} &= \frac{1}{r_1^{Q-1}} \left(\frac{2^{r_1(2\pi)} r_{2R_0}}{w|\sqrt{d}|} \right)^k \\ &= \frac{2^{Q+1} R_0}{w} \frac{(2\pi)^{r_2}}{|\sqrt{d}|} \left(\frac{2^{r_1(2\pi)} r_{2R_0}}{w|\sqrt{d}|} \right)^{k-1}, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \frac{w_0}{R} B_{k-1,k}^{(\hat{Q}_1, \dots, \hat{Q}_k)} &= \frac{w_0}{R} \frac{1}{(k-1)!} A_k^{(\hat{Q}_1, \dots, \hat{Q}_k)} \\ &= \frac{2^{Q+1} w_0 R_0}{wR} \frac{(2\pi)^{r_2}}{|\sqrt{d}|} \frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{2^{r_1(2\pi)} r_{2R_0}}{w|\sqrt{d}|} \right)^{k-1} \\ &= \frac{(2\pi)^{r_2}}{|\sqrt{d}|} \frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{2^{r_1(2\pi)} r_{2R_0}}{w|\sqrt{d}|} \right)^{k-1}; \end{aligned}$$

dabei wurde benutzt, daß für $r_1=0$ $w=w_0$ und $R=R_0$, für $r_1 \geq 1$ $w=2w_0$ und $R=2^Q R_0$, in jedem Falle also $2^{Q+1} w_0 R_0 / wR = 1$ ist. Weiter folgt

$$\begin{aligned} \frac{w_0}{R} B_{k-1,k} &= \frac{w_0}{R} \sum_{\substack{(\hat{Q}_1, \dots, \hat{Q}_k) \\ \hat{Q}_1 \dots \hat{Q}_k = \hat{Q}_0}} B_{k-1,k}^{(\hat{Q}_1, \dots, \hat{Q}_k)} \\ &= \frac{(2\pi)^{r_2}}{|\sqrt{d}|} \frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{2^{r_1(2\pi)} r_{2R_0}}{w|\sqrt{d}|} \right)^{k-1} \sum_{\substack{(\hat{Q}_1, \dots, \hat{Q}_k) \\ \hat{Q}_1 \dots \hat{Q}_k = \hat{Q}_0}} 1 \end{aligned}$$

$$= \frac{(2\pi)^{r_2}}{|\sqrt{d}|} \frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{2^{r_1(2\pi)^{r_2 R_O h}}}{w|\sqrt{d}|} \right)^{k-1}.$$

2. Für $\hat{r} \geq 2$, $x_1, \dots, x_{\hat{r}} > 0$ sei

$$L(x_1, \dots, x_{\hat{r}}) := \sum_{\gamma > 0} \log N(\gamma) \quad .$$

$$0 < |\gamma(h)| e^{h \cdot x_h}$$

Setzt man für $\sigma > 1$

$$\phi_{\mathfrak{m}}^{(L)}(s) := \sum_{\gamma} \frac{\log N(\gamma)}{N(\gamma)^s} \exp\{\mathfrak{m}^T E q(\gamma)\} \quad ,$$

so erhält man mit Hilfssatz 3 unmittelbar

$$-\phi_{\mathfrak{m}}^{(L)}(s) = \frac{1}{2^{r_1-Q-1}} t_{Q+2}, \dots, t_{r_1} = 0, 1 \frac{d}{ds} \zeta_{\mathfrak{m}}(s, \hat{Q}_0, 4) \quad . \quad (44)$$

Aus Hilfssatz 5 folgt:

Hilfssatz 10: Für $\mathfrak{m}$ gemäß (11), 4 gemäß (12) und $\hat{Q}, \hat{f}$ gilt:

- a) $\zeta'_{\mathfrak{m}}(s, \hat{Q}, 4)$ ist eine ganze transzendente Funktion, falls $|\mathfrak{m}|^2 + |4|^2 > 0$ ist; die Funktion $\zeta'_\sigma(s, \hat{Q}, \sigma)$ ist überall regulär mit Ausnahme des Punktes $s=1$; dort liegt ein zweifacher Pol vor mit dem Hauptteil

$$- \frac{2^{r_1(2\pi)^{r_2 R_O}}}{w|\sqrt{d}|} \frac{1}{(s-1)^2} \quad .$$

- b) $\zeta'_{\mathfrak{m}}(s, \hat{Q}, 4)$ genügt der Funktionalgleichung

$$\zeta'_{\mathfrak{m}}(s, \hat{Q}, 4) = -W_{\mathfrak{m}}(4) \gamma_{-2\mathfrak{m}} A^{1-2s} \frac{\Gamma_{-\mathfrak{m}}(1-s, 4)}{\Gamma_{\mathfrak{m}}(s, 4)} \zeta_{-\mathfrak{m}}(1-s, \hat{Q}', 4) \quad .$$

$$\cdot \left\{ 2 \log A + \frac{\Gamma'_{-\mathfrak{m}}(1-s, 4)}{\Gamma_{-\mathfrak{m}}(1-s, 4)} + \frac{\Gamma'_{\mathfrak{m}}(s, 4)}{\Gamma_{\mathfrak{m}}(s, 4)} + \frac{\zeta'_{-\mathfrak{m}}(1-s, \hat{Q}', 4)}{\zeta_{-\mathfrak{m}}(1-s, \hat{Q}', 4)} \right\} \quad .$$

Beweis: a) Für $|m|^2 + |4|^2 > 0$ folgt die Regularität von $\zeta'_m(s, \hat{d}, 4)$ aus der Regularität von $\zeta_m(s, \hat{d}, 4)$; ferner gilt nach Hilfssatz 5a)

$$\zeta'_\sigma(s, \hat{d}, 4) = \frac{2^{r_1(2\pi)^{r_2} R_0}}{w|\sqrt{d}|} \frac{1}{s-1} + f(s, \hat{d}, 4)$$

mit einer ganzen Funktion $f(s, \hat{d}, 4)$, also

$$\zeta'_\sigma(s, \hat{d}, 4) = - \frac{2^{r_1(2\pi)^{r_2} R_0}}{w|\sqrt{d}|} \frac{1}{(s-1)^2} + f'(s, \hat{d}, 4) .$$

b) Die angegebene Funktionalgleichung erhält man durch Differentiation der Funktionalgleichung aus Hilfssatz 5b) nach s .

Die Funktionen $\zeta'_m(s, \hat{d}, 4)$ sollen jetzt im Streifen S_ρ , $0 < \rho \leq 1/2$, abgeschätzt werden. Für $0 < \rho \leq 1/2$ gilt

$$\begin{aligned} |\zeta'(1+\rho+it, \hat{d}, 4)| &= \left| \sum_{(\hat{a}) \in \hat{d}} \frac{\log N(\hat{a})}{N(\hat{a})^{1+\rho+it}} \lambda_m((\hat{a}), 4) \right| \\ &\leq \sum_{(\hat{a}) \in \hat{d}} \frac{\log N(\hat{a})}{N(\hat{a})^{1+\rho}} \leq \sum_{(\hat{a}) \neq (0)} \frac{\log N(\hat{a})}{N(\hat{a})^{1+\rho}} =: c_{18}(\rho) . \end{aligned} \quad (45)$$

Da in jedem Winkelraum $-\pi + \delta < \arg s < \pi - \delta$, $\delta > 0$,

$$\frac{r'(s)}{r(s)} = \log s + O(|s|^{-1})$$

gilt, ist insbesondere für $\sigma \geq -1/2$, $|t| \leq 1$

$$\left| \frac{r'(s)}{r(s)} \right| \leq c_{19} \log(1+|s|) . \quad (46)$$

Da ferner die Funktion $r'(s)/r(s)$ auf der Strecke $s = \sigma_0 + it$ mit $\sigma_0 \geq -1/2$, $\sigma_0 \neq 0$, fest, und $|t| \leq 1$ holomorph, also beschränkt ist, folgt weiter:

$$\left| \frac{r'(s)}{r(s)} \right| \leq c_{20}(\sigma_0) \log(1+|s|)$$

auf der ganzen Geraden $\sigma = \sigma_0$ ($\sigma_0 \geq -1/2$, $\sigma_0 \neq 0$). Daher ist für $0 < \rho \leq 1/2$:

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{\Gamma'_{-m}(-\rho + it, 4)}{\Gamma_m(-\rho + it, 4)} \right| &= \left| \frac{\sum_{p=1}^{\hat{r}} \frac{e_p}{2} \frac{\Gamma' \left(\frac{e_p}{2}(-\rho + it + t_p - iE_p(m)) \right)}{\Gamma \left(\frac{e_p}{2}(-\rho + it + t_p - iE_p(m)) \right)} \right| \\
 &\leq \sum_{p=1}^{\hat{r}} \left| \frac{\Gamma' \left(\frac{e_p}{2}(-\rho + it + t_p - iE_p(m)) \right)}{\Gamma \left(\frac{e_p}{2}(-\rho + it + t_p - iE_p(m)) \right)} \right| \\
 &\leq c_{20}(-\rho) \sum_{p=1}^{\hat{r}} \log \left(1 + \frac{e_p}{2} |-\rho + it + t_p - iE_p(m)| \right) \\
 &\leq c_{20}(-\rho) \sum_{p=1}^{\hat{r}} \log \left(1 + \frac{e_p}{2} |1 - \rho + it - iE_p(m)| \right) \\
 &\leq c_{21}(\rho) \sum_{p=1}^{\hat{r}} \left(\frac{e_p}{2} |1 - \rho + it - iE_p(m)| \right)^{e_p \rho} \\
 &\leq c_{22}(\rho) \max_{p=1, \dots, \hat{r}} \left(\frac{e_p}{2} |1 - \rho + it - iE_p(m)| \right)^{e_p \rho} \\
 &\leq c_{23}(\rho) \left\{ \prod_{p=1}^{\hat{r}} \left(\frac{e_p}{2} |1 - \rho + it - iE_p(m)| \right)^{e_p} \right\}^{\rho} ;
 \end{aligned}$$

analog erhält man

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{\Gamma'_{-m}(1 + \rho + it, 4)}{\Gamma_m(1 + \rho + it, 4)} \right| &\leq c_{24}(\rho) \left\{ \prod_{p=1}^{\hat{r}} \left(\frac{e_p}{2} |2 + \rho + it - iE_p(m)| \right)^{e_p} \right\}^{\rho} \\
 &\leq c_{25}(\rho) \left\{ \prod_{p=1}^{\hat{r}} \left(\frac{e_p}{2} |1 - \rho + it - iE_p(m)| \right)^{e_p} \right\}^{\rho} .
 \end{aligned}$$

Damit erhält man aus Hilfssatz 10b) unter Berücksichtigung von (14), (15) und (45):

$$|\zeta'_m(-\rho+it, \hat{\mathfrak{A}}, 4)| \leq c_{26}(\rho) \left\{ \prod_{p=1}^{\hat{r}} \left(\frac{e_p}{2} |1-\rho+it-iE_p(m)| \right)^{e_p} \right\}^{\frac{1}{2}+2\rho} \quad (47)$$

Aus (46) erhält man durch ähnliche Rechnung wie oben für $-1/2 \leq \sigma \leq 3/2$, $|t-E_p(m)| \geq 1$, $p=1, \dots, \hat{r}$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Gamma'_m(s, 4)}{\Gamma_m(s, 4)} \right| &\leq c_{19} \sum_{p=1}^{\hat{r}} \log \left(1 + \frac{e_p}{2} |\sigma+it+t_p-iE_p(m)| \right) \\ &\leq c_{19} \sum_{p=1}^{\hat{r}} |\sigma+t_p+i(t-E_p(m))| \leq c_{27} \sum_{p=1}^{\hat{r}} |t-E_p(m)| \\ &\leq c_{28}(1+|t|) \quad . \end{aligned}$$

Wegen (17) folgt hieraus

$$\frac{\Gamma'_m(s, 4)}{\Gamma_m(s, 4)} \frac{1}{\Gamma_m(s, 4)} = O(e^{c_{29}|t|})$$

für $-1/2 \leq \sigma \leq 3/2$, $|t-E_p(m)| \geq 1$, $p=1, \dots, \hat{r}$. Da die Funktion $\Gamma'_m(s, 4)/\Gamma_m^2(s, 4)$ in den Rechtecken $-1/2 \leq \sigma \leq 3/2$, $|t-E_p(m)| \geq 1$, $p=1, \dots, \hat{r}$, holomorph, also beschränkt ist, gilt diese Abschätzung im ganzen Streifen $-1/2 \leq \sigma \leq 3/2$. Für $|m|^2 + |4|^2 > 0$ gilt dann, wie man mittels (17) und der letzten Abschätzung aus [2], (40), (42), (43) entnehmen kann,

$$\zeta'_m(s, \hat{\mathfrak{A}}, 4) = O(e^{c_{30}|t|}) \quad \text{in } S_\rho \quad (48)$$

Auf der Grundlage der Abschätzungen (45), (47) und (48) kann man jetzt analog zum Beweis von Hilfssatz 6 verfahren und erhält das folgende Ergebnis.

Hilfssatz 11: Für m gemäß (11), 4 gemäß (12), $|m|^2 + |4|^2 > 0$, $\hat{\mathfrak{A}} \in \hat{\mathfrak{F}}$, $0 < \rho \leq 1/2$ gilt in S_ρ :

$$|\zeta'_m(s, \hat{\mathfrak{A}}, 4)| \leq c_{31}(\rho) \left\{ \prod_{p=1}^{\hat{r}} |1+s-iE_p(m)|^{e_p} \right\}^{\frac{3}{4}(1+\rho-\sigma)} ;$$

für $|t| \geq t_0 > 0$ genügt auch die Funktion $\tau_\nu(s, \hat{\Delta}, \nu)$ dieser Ungleichung.

Aus Hilfssatz 11 und (44) entnimmt man unter Berücksichtigung von Hilfssatz 10a), daß die Funktionen $\phi_m^{(L)}(s)$ die Voraussetzungen von Hilfssatz 9 mit $c_0 = z_0 = 0$, $z_1 = 1$, $\lambda = 3/4$, $c_{10}(\rho) = c_{31}(\rho)$ und $P=2$ erfüllen. Hilfssatz 9 liefert somit:

Satz 4: Für $\hat{r} \geq 2$, $x_1, \dots, x_{\hat{r}} > 0$ und für jedes $\delta > 0$ gilt:

$$L(x_1, \dots, x_{\hat{r}}) = \frac{(2\pi)^{r_2}}{|\sqrt{d}|} (x_1 \cdots x_{\hat{r}} \log x_1 \cdots x_{\hat{r}} - \hat{r} x_1 \cdots x_{\hat{r}}) + \\ + O\left((x_1 \cdots x_{\hat{r}})^{1 - \frac{1}{n+1} + \delta}\right).$$

Beweis: Bei der Anwendung der Hilfssätze 9 und 10 und der Gleichung (44) ist zu beachten, daß der Hauptteil der Laurent-Entwicklung von $\phi_\nu^{(L)}(s)$ um den Punkt $s=1$ mit demjenigen von

$-2^{-r_1+Q+1} \frac{d}{ds} \tau_\nu(s, \hat{\Delta}_0, \nu)$ übereinstimmt und daß $2^{Q+1} w_0 R_0 / w_R = 1$ ist. Ferner ist wegen $l_p = \langle e_p \cdot 3/4 \rangle + 1$, $p=1, \dots, \hat{r}$,

$$\sum_{p=1}^{\hat{r}} (l_p - 1) = \sum_{p=1}^{\hat{r}} \left\langle \frac{3}{4} e_p \right\rangle = r_1 + 2r_2 = n.$$

3. Für $\hat{\Delta} \in \mathcal{F}$, ganze Zahlen $\gamma \in K$, $\hat{r} \geq 2$ und $x_1, \dots, x_{\hat{r}} > 0$ sei

$$\tau_{\hat{\Delta}}(\gamma) := \sum_{\substack{\alpha \in (\gamma) \\ \alpha \in \hat{\Delta}}} N\alpha, \quad \tau(\gamma) := \sum_{\alpha \in (\gamma)} N\alpha, \quad (49)$$

$$T_{\hat{\Delta}}^*(x_1, \dots, x_{\hat{r}}) := \sum_{\gamma > 0} \frac{\tau_{\hat{\Delta}}(\gamma)}{N(\gamma)}, \\ 0 < |\gamma^{(h)}|^{e_h} < x_h$$

$$T^*(x_1, \dots, x_{\hat{r}}) := \sum_{\gamma > 0} \frac{\tau(\gamma)}{N(\gamma)} ;$$

$$0 < |\gamma^{(h)}|^{e_h} < x_h$$

offenbar gilt

$$\tau(\gamma) = \sum_{\hat{Q} \in \hat{J}} \tau_{\hat{Q}}(\gamma) , \quad T^*(x_1, \dots, x_{\hat{r}}) = \sum_{\hat{Q} \in \hat{J}} T^*(x_1, \dots, x_{\hat{r}}) .$$

Setzt man für $\hat{Q} \in \hat{J}, \sigma > 1$

$$\phi_m^{(T^*)}(s, \hat{Q}) := \sum_{\gamma} \frac{\tau_{\hat{Q}}(\gamma)}{N(\gamma)^{s+1}} \exp\{m^T E_{\hat{Q}}(\gamma)\} ,$$

so folgt aus Hilfssatz 3

$$\phi_m^{(T^*)}(s, \hat{Q}) = \frac{1}{2^{r_1 - Q - 1}} \sum_{t_{Q+2}, \dots, t_{r_1} = 0, 1} \zeta_m(s, \hat{Q}, t) \zeta_m(s+1, \hat{Q}^{-1}, t) , \quad (50)$$

denn es ist

$$\begin{aligned} \zeta_m(s, \hat{Q}, t) \zeta_m(s+1, \hat{Q}^{-1}, t) &= \sum_{(\hat{\alpha}) \in \hat{Q}} \frac{\lambda_m((\hat{\alpha}), t)}{N(\hat{\alpha})^s} \sum_{(\hat{\beta}) \in \hat{Q}^{-1}} \frac{\lambda_m((\hat{\beta}), t)}{N(\hat{\beta})^{s+1}} \\ &= \sum_{(\gamma) \in \hat{Q}_0} \frac{\lambda_m((\gamma), t)}{N(\gamma)^{s+1}} \sum_{\substack{(\hat{\alpha}) / (\gamma) \\ (\hat{\alpha}) \in \hat{Q}}} N(\hat{\alpha}) = \sum_{(\gamma) \in \hat{Q}_0} \frac{\tau_{\hat{Q}}(\gamma)}{N(\gamma)^{s+1}} \lambda_m((\gamma), t) . \end{aligned}$$

Da ferner für jedes $c > 0$

$$\tau_{\hat{Q}}(\gamma) = \sum_{\substack{\alpha / (\gamma) \\ \alpha \in \hat{Q}}} N\alpha \leq N(\gamma) \sum_{\alpha / (\gamma)} 1 = N(\gamma) d_2(\gamma) = O(N(\gamma)^{c+1}) \quad (51)$$

gilt, ist die Funktion $\tau_{\hat{Q}}(\gamma) N(\gamma)^{-(c+1)}$ für jedes $c > 0$ beschränkt.

Somit folgt aus (50) und Hilfssatz 6 unter Beachtung von Hilfssatz 5a) und (15), daß die Funktionen $\phi_{\mathcal{M}}^{(T^*)}(s, \hat{\mathcal{Q}})$ die Voraussetzungen von Korollar 3 mit $c_0 = z_0 = 0$, $z_1 = 1$, $\lambda = 1/2$, $c_{10}(\rho) = c_3(\rho) \cdot \zeta_K(1+2\rho)$ und $P=1$ erfüllen. Aus Korollar 3, Hilfssatz 5a) und (50) erhält man nun, da das Residuum von $\phi_{\mathcal{V}}^{(T^*)}(s, \hat{\mathcal{Q}})$ im Punkte $s=1$ mit dem von $2^{-r_1+Q+1} \zeta_{\mathcal{V}}(s, \hat{\mathcal{Q}}, \sigma) \zeta_{\mathcal{V}}(s+1, \hat{\mathcal{Q}}^{-1}, \sigma)$ übereinstimmt und da $2^{Q+1} w_0 R_0 / wR = 1$ ist, den nachstehenden Satz.

Satz 5: Für $\hat{\mathcal{Q}} \in \hat{\mathcal{H}}$, $\hat{r} \geq 2$, $x_1, \dots, x_{\hat{r}} > 0$ und für jedes $\delta > 0$ gilt:

$$a) \quad T^*(x_1, \dots, x_{\hat{r}}) = \frac{(2\pi)^{r_2}}{|\sqrt{d}|} \zeta_{\mathcal{V}}(2, \hat{\mathcal{Q}}^{-1}, \sigma) x_1 \cdots x_{\hat{r}} + O\left((x_1 \cdots x_{\hat{r}})^{1 - \frac{1}{\hat{r}+1} + \delta}\right)$$

$$b) \quad T^*(x_1, \dots, x_{\hat{r}}) = \frac{(2\pi)^{r_2}}{|\sqrt{d}|} \zeta_K(2) x_1 \cdots x_{\hat{r}} + O\left((x_1 \cdots x_{\hat{r}})^{1 - \frac{1}{\hat{r}+1} + \delta}\right)$$

4. Für $\hat{r} \geq 2$, $x_1, \dots, x_{\hat{r}} > 0$ und $\hat{\mathcal{Q}} \in \hat{\mathcal{H}}$ sei

$$T_{\hat{\mathcal{Q}}}(x_1, \dots, x_{\hat{r}}) := \sum_{\gamma > 0} \tau_{\hat{\mathcal{Q}}}(\gamma) \quad , \quad 0 < |\gamma^{(h)}|^{e_h} < x_h$$

$$T(x_1, \dots, x_{\hat{r}}) := \sum_{\gamma > 0} \tau(\gamma) \quad , \quad 0 < |\gamma^{(h)}|^{e_h} < x_h$$

mit $\tau_{\hat{\mathcal{Q}}}(\gamma)$, $\tau(\gamma)$ aus (49). Offenbar ist

$$T(x_1, \dots, x_{\hat{r}}) = \sum_{\hat{\mathcal{Q}} \in \hat{\mathcal{H}}} T_{\hat{\mathcal{Q}}}(x_1, \dots, x_{\hat{r}}) \quad .$$

Setzt man für $\hat{\mathcal{Q}} \in \hat{\mathcal{H}}$, $\sigma > 2$

$$\phi_{\mathcal{M}}^{(T)}(s, \hat{\mathcal{Q}}) := \sum_{\gamma} \frac{\tau_{\hat{\mathcal{Q}}}(\gamma)}{N(\gamma)^s} \exp\{\mathcal{M}^T E_{\mathcal{Q}}(\gamma)\} \quad ,$$

so folgt aus Hilfssatz 3

$$\phi_m^{(T)}(s, \hat{Q}) = \frac{1}{r_1^{1-Q-1}} \sum_{\substack{t_{Q+2}, \dots, t_{r_1} = 0, 1}} \zeta_m(s-1, \hat{Q}, 4) \zeta_m(s, \hat{Q}^{-1}, 4) \quad , \quad (52)$$

denn es ist

$$\begin{aligned} \zeta_m(s-1, \hat{Q}, 4) \zeta_m(s, \hat{Q}^{-1}, 4) &= \sum_{(\hat{\alpha}) \in \hat{Q}} \frac{\lambda_m((\hat{\alpha}), 4)}{N(\hat{\alpha})^{s-1}} \sum_{(\hat{\beta}) \in \hat{Q}^{-1}} \frac{\lambda_m((\hat{\beta}), 4)}{N(\hat{\beta})^s} \\ &= \sum_{(\gamma) \in \hat{Q}_0} \frac{\lambda_m((\gamma), 4)}{N(\gamma)^s} \sum_{\substack{(\hat{\alpha})/(\gamma) \\ (\hat{\alpha}) \in \hat{Q}}} N(\hat{\alpha}) = \sum_{(\gamma) \in \hat{Q}_0} \frac{\tau_{\hat{Q}}(\gamma)}{N(\gamma)^s} \lambda_m((\gamma), 4) \quad . \end{aligned}$$

Aus Hilfssatz 6 folgt, daß die Funktionen $\zeta_m(s-1, \hat{Q}, 4)$ für $|m|^2 + |4|^2 > 0$ im Streifen $1-\rho \leq \sigma \leq 2+\rho$ mit $0 < \rho \leq 1/2$ der folgenden Ungleichung genügen:

$$\begin{aligned} |\zeta_m(s-1, \hat{Q}, 4)| &\leq c_3(\rho) \left\{ \prod_{p=1}^{\hat{r}} |s - iE_p(m)| e_p \right\}^{\frac{1}{2}(2+\rho-\sigma)} \\ &\leq c_3(\rho) \left\{ \prod_{p=1}^{\hat{r}} |1 + s - iE_p(m)| e_p \right\}^{\frac{1}{2}(2+\rho-\sigma)} \quad ; \end{aligned}$$

für $|t| \geq t_0 > 0$ genügt auch die Funktion $\zeta_{\sigma}(1-s, \hat{Q}, \sigma)$ dieser Ungleichung. Hieraus entnimmt man unter Beachtung von Hilfssatz 5a), (15), (51) und (52), daß die Funktionen $\phi_m^{(T)}(s, \hat{Q})$ die Voraussetzungen von Korollar 2 mit $c_0 = z_0 = 1$, $z_1 = 2$, $\lambda = 1/2$ und $c_{10}(\rho) = c_3(\rho) \zeta_K(1+2\rho)$ erfüllen. Aus Korollar 2 folgt somit für $y^{(1)}, \dots, y^{(\hat{r})} > 0$, $x_1 \dots x_{\hat{r}} \geq 1$ und jedes $\delta > 0$:

$$\int_0^{y^{(\hat{r})}} \dots \int_0^{y^{(1)}} T_{\hat{Q}}(x_1 + v^{(1)}, \dots, x_{\hat{r}} + v^{(\hat{r})}) dv^{(1)} \dots dv^{(\hat{r})} =$$

$$= \frac{w_0}{R} \operatorname{Res}_{s=2} \phi_v^{(T)}(s, \mathfrak{A}) \prod_{p=1}^{\hat{r}} \frac{(x_p + y^{(p)})^{s+1} - x_p^{s+1}}{s(s+1)} + \\ + O\left(\left\{\prod_{p=1}^{\hat{r}} (x_p + y^{(p)})\right\}^{2+\delta}\right).$$

Nach Hilfssatz 8a) ist für $x, y > 0$ und $\operatorname{Re} s > 0$

$$\int_0^y \int_0^{x+v} u^{s-1} du dv = \frac{(x+y)^{s+1} - x^{s+1}}{s(s+1)} ;$$

hieraus folgt:

$$\operatorname{Res}_{s=2} \phi_v^{(T)}(s, \mathfrak{A}) \prod_{p=1}^{\hat{r}} \frac{(x_p + y^{(p)})^{s+1} - x_p^{s+1}}{s(s+1)} \\ = \operatorname{Res}_{s=2} \phi_v^{(T)}(s, \mathfrak{A}) \prod_{p=1}^{\hat{r}} \int_0^{y^{(p)}} \int_0^{x_p + v^{(p)}} (u^{(p)})^{s-1} du^{(p)} dv^{(p)} \\ = \operatorname{Res}_{s=2} \int_0^{y(\hat{r})} \dots \int_0^{y(1)} \int_0^{x_{\hat{r}} + v(\hat{r})} \dots \int_0^{x_1 + v(1)} (u^{(1)} \dots u^{(\hat{r})})^{s-1} \cdot \\ \cdot \phi_v^{(T)}(s, \mathfrak{A}) du^{(1)} \dots du^{(\hat{r})} dv^{(1)} \dots dv^{(\hat{r})} \\ = \int_0^{y(\hat{r})} \dots \int_0^{y(1)} \int_0^{x_{\hat{r}} + v(\hat{r})} \dots \int_0^{x_1 + v(1)} \operatorname{Res}_{s=2} (u^{(1)} \dots u^{(\hat{r})})^{s-1} \cdot \\ \cdot \phi_v^{(T)}(s, \mathfrak{A}) du^{(1)} \dots du^{(\hat{r})} dv^{(1)} \dots dv^{(\hat{r})} ;$$

darin ist nach (52) und Hilfssatz 5a)

$$\operatorname{Res}_{s=2} (u^{(1)} \dots u^{(\hat{r})})^{s-1} \phi_v^{(T)}(s, \mathfrak{A}) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2^{r_1-Q-1}} \operatorname{Res}_{s=2} (u^{(1)} \dots u^{(\hat{r})})^{s-1} \zeta_{\mathcal{V}}(s-1, \hat{\mathfrak{d}}, \mathcal{V}) \zeta_{\mathcal{V}}(s, \hat{\mathfrak{d}}^{-1}, \mathcal{V}) \\
 &= \frac{1}{2^{r_1-Q-1}} u^{(1)} \dots u^{(\hat{r})} \zeta_{\mathcal{V}}(2, \hat{\mathfrak{d}}^{-1}, \mathcal{V}) \operatorname{Res}_{s=2} \zeta_{\mathcal{V}}(s-1, \hat{\mathfrak{d}}, \mathcal{V}) \\
 &= \frac{2^{r_1(2\pi)} r_2 R_O}{2^{r_1-Q-1} w |\sqrt{d}|} \zeta_{\mathcal{V}}(2, \hat{\mathfrak{d}}^{-1}, \mathcal{V}) u^{(1)} \dots u^{(\hat{r})} \\
 &= 2^{Q+1} \frac{R_O}{w} \frac{(2\pi)^{r_2}}{|\sqrt{d}|} \zeta_{\mathcal{V}}(2, \hat{\mathfrak{d}}^{-1}, \mathcal{V}) u^{(1)} \dots u^{(\hat{r})} .
 \end{aligned}$$

Eingesetzt, ergibt dies wegen $2^{Q+1} w_O R_O / w R = 1$:

$$\begin{aligned}
 &y^{(\hat{r})} \int_0^{\dots} \int_0^{\dots} T_{\hat{\mathfrak{d}}} (x_1^{(1)}, \dots, x_{\hat{r}+v}^{(\hat{r})}) dv^{(1)} \dots dv^{(\hat{r})} \\
 &= \frac{(2\pi)^{r_2}}{|\sqrt{d}|} \zeta_{\mathcal{V}}(2, \hat{\mathfrak{d}}^{-1}, \mathcal{V}) \int_0^{\dots} \int_0^{\dots} \int_0^{\dots} \int_0^{\dots} u^{(1)} \dots u^{(\hat{r})} . \\
 &\quad \cdot du^{(1)} \dots du^{(\hat{r})} dv^{(1)} \dots dv^{(\hat{r})} + \mathcal{O} \left(\left\{ \prod_{p=1}^{\hat{r}} (x_p + y^{(p)}) \right\}^{2+\delta} \right) \quad (53) \\
 &= \frac{(2\pi)^{r_2}}{|\sqrt{d}|} \zeta_{\mathcal{V}}(2, \hat{\mathfrak{d}}^{-1}, \mathcal{V}) \prod_{p=1}^{\hat{r}} \int_0^{y^{(p)}} x_p^{(p)} \int_0^{x_p^{(p)} + v^{(p)}} u^{(p)} du^{(p)} dv^{(p)} + \\
 &\quad + \mathcal{O} \left(\left\{ \prod_{p=1}^{\hat{r}} (x_p + y^{(p)}) \right\}^{2+\delta} \right) .
 \end{aligned}$$

Im Folgenden sei stets

$$y^{(p)} \leq x_p, \quad p = 1, \dots, \hat{r}, \quad (54)$$

vorausgesetzt. Wegen der Monotonie von $T(x_1, \dots, x_{\hat{r}})$ in allen Variablen gilt:

$$\begin{aligned}
 & y^{(\hat{r})} \int_0^{y^{(1)}} \dots \int_0^{y^{(1)}} T_{\mathcal{Q}}(x_1 + v^{(1)} - y^{(1)}, \dots, x_{\hat{r}} + v^{(\hat{r})} - y^{(\hat{r})}) dv^{(1)} \dots dv^{(\hat{r})} \\
 & \leq y^{(1)} \dots y^{(\hat{r})} T_{\mathcal{Q}}(x_1, \dots, x_{\hat{r}}) \quad (55) \\
 & \leq \int_0^{y^{(\hat{r})}} \dots \int_0^{y^{(1)}} T_{\mathcal{Q}}(x_1 + v^{(1)}, \dots, x_{\hat{r}} + v^{(\hat{r})}) dv^{(1)} \dots dv^{(\hat{r})} .
 \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{y^{(1)} \dots y^{(\hat{r})}} \prod_{p=1}^{\hat{r}} \int_0^{y^{(p)}} \int_0^{x_p + v^{(p)}} u^{(p)} du^{(p)} dv^{(p)} \\
 & = \frac{1}{y^{(1)} \dots y^{(\hat{r})}} \prod_{p=1}^{\hat{r}} \int_0^{y^{(p)}} \frac{1}{2} (x_p + v^{(p)})^2 dv^{(p)} \\
 & = \frac{1}{y^{(1)} \dots y^{(\hat{r})}} \prod_{p=1}^{\hat{r}} \frac{1}{6} \{ (x_p + y^{(p)})^3 - x_p^3 \} \\
 & = \frac{1}{y^{(1)} \dots y^{(\hat{r})}} \prod_{p=1}^{\hat{r}} \frac{1}{6} \{ 3x_p^2 y^{(p)} + 3x_p (y^{(p)})^2 + (y^{(p)})^3 \} \\
 & = \frac{1}{2^{\hat{r}}} (x_1 \dots x_{\hat{r}})^2 + O \left((x_1 \dots x_{\hat{r}})^2 \sum_{p=1}^{\hat{r}} \frac{y^{(p)}}{x_p} \right) ,
 \end{aligned}$$

also mit (53)

$$\frac{1}{y^{(1)} \dots y^{(\hat{r})}} \int_0^{y^{(\hat{r})}} \dots \int_0^{y^{(1)}} T_{\mathcal{Q}}(x_1 + v^{(1)}, \dots, x_{\hat{r}} + v^{(\hat{r})}) dv^{(1)} \dots dv^{(\hat{r})} =$$

$$= \frac{(2\pi)^{r_2}}{|\sqrt{d}|} 2^{-\hat{r}} \zeta_{\mathcal{V}}(2, \hat{\mathfrak{d}}^{-1}, \mathcal{V}) (x_1 \cdots x_{\hat{r}})^2 + \mathcal{O}\left((x_1 \cdots x_{\hat{r}})^2 \sum_{p=1}^{\hat{r}} \frac{y^{(p)}}{x_p}\right) + \\ + \mathcal{O}\left(\frac{(x_1 \cdots x_{\hat{r}})^{2+\delta}}{y^{(1)} \cdots y^{(\hat{r})}}\right) ;$$

analoge Überlegungen ergeben

$$\frac{1}{y^{(1)} \cdots y^{(\hat{r})}} \int_0^{y^{(\hat{r})}} \cdots \int_0^{y^{(1)}} T_{\hat{\mathfrak{d}}}(x_1 + v^{(1)} - y^{(1)}, \dots, x_{\hat{r}} + v^{(\hat{r})} - y^{(\hat{r})}) \cdot \\ \cdot dv^{(1)} \cdots dv^{(\hat{r})} \\ = \frac{(2\pi)^{r_2}}{|\sqrt{d}|} 2^{-\hat{r}} \zeta_{\mathcal{V}}(2, \hat{\mathfrak{d}}^{-1}, \mathcal{V}) (x_1 \cdots x_{\hat{r}})^2 + \mathcal{O}\left((x_1 \cdots x_{\hat{r}})^2 \sum_{p=1}^{\hat{r}} \frac{y^{(p)}}{x_p}\right) + \\ + \mathcal{O}\left(\frac{(x_1 \cdots x_{\hat{r}})^{2+\delta}}{y^{(1)} \cdots y^{(\hat{r})}}\right) ;$$

somit erhält man aus (55)

$$T_{\hat{\mathfrak{d}}}(x_1, \dots, x_{\hat{r}}) = \frac{(2\pi)^{r_2}}{|\sqrt{d}|} 2^{-\hat{r}} \zeta_{\mathcal{V}}(2, \hat{\mathfrak{d}}^{-1}, \mathcal{V}) (x_1 \cdots x_{\hat{r}})^2 + \\ + \mathcal{O}\left((x_1 \cdots x_{\hat{r}})^2 \sum_{p=1}^{\hat{r}} \frac{y^{(p)}}{x_p}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{(x_1 \cdots x_{\hat{r}})^{2+\delta}}{y^{(1)} \cdots y^{(\hat{r})}}\right) .$$

Das günstigste Ergebnis erzielt man mit

$$\frac{y^{(1)}}{x_1} = \dots = \frac{y^{(\hat{r})}}{x_{\hat{r}}} = (x_1 \cdots x_{\hat{r}})^{-\frac{1}{\hat{r}+1}} ;$$

diese Wahl ist möglich, da für $x_1 \cdots x_{\hat{r}} \geq 1$ die Bedingung (54) erfüllt ist. Setzt man die so gewählten $y^{(1)}, \dots, y^{(\hat{r})}$ ein, so erhält man:

Satz 6: Für $\hat{\Phi} \in \mathcal{H}$, $\hat{r} \geq 2$, $x_1, \dots, x_{\hat{r}} > 0$ und für jedes $\delta > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} \text{a) } T_{\hat{\Phi}}(x_1, \dots, x_{\hat{r}}) &= \frac{(2\pi)^{\hat{r}_2}}{|\sqrt{d}|} 2^{-\hat{r}} \zeta_{\mathcal{V}}(2, \hat{\Phi}^{-1}, \emptyset) (x_1 \cdots x_{\hat{r}})^2 + \\ &+ O\left((x_1 \cdots x_{\hat{r}})^{2 - \frac{1}{\hat{r}+1} + \delta}\right) ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } T(x_1, \dots, x_{\hat{r}}) &= \frac{(2\pi)^{\hat{r}_2}}{|\sqrt{d}|} 2^{-\hat{r}} \zeta_K(2) (x_1 \cdots x_{\hat{r}})^2 + \\ &+ O\left((x_1 \cdots x_{\hat{r}})^{2 - \frac{1}{\hat{r}+1} + \delta}\right) . \end{aligned}$$

§5 Weitere Anwendungen

1. Als nächstes soll die für $\hat{r} \geq 2$, $x_1, \dots, x_{\hat{r}} > 0$ durch

$$M(x_1, \dots, x_{\hat{r}}) := \sum_{\gamma \succ 0} \mu^2(\gamma) \cdot 0 < |\gamma^{(h)}| e_{h < x_h}$$

definierte Summe, in der $\mu(\gamma)$ die Moebius'sche Funktion bezeichnet, behandelt werden. Setzt man für $\mathcal{M}$ gemäß (11), $\mathcal{A}$ gemäß (12), $\hat{\alpha} \in \hat{\mathcal{A}}$ und $\sigma > 1$

$$M_{\mathcal{M}}(s, \hat{\alpha}, \mathcal{A}) := \sum_{(\hat{\alpha}) \in \hat{\mathcal{A}}} \frac{\mu^2(\hat{\alpha})}{N(\hat{\alpha})^s} \lambda_{\mathcal{M}}((\hat{\alpha}), \mathcal{A}) \quad ,$$

so gilt:

Hilfssatz 12: Für $\mathcal{M}$ gemäß (11) und $\mathcal{A}$ gemäß (12) ist mit h als Klassenzahl von K

$$M_{\mathcal{M}}(s, \hat{\alpha}_1, \mathcal{A}) = \frac{\Delta_{\mathcal{M}}^{(1)}(s, \mathcal{A})}{\Delta_{\mathcal{M}}(s)} \quad , \quad l = 0, \dots, h-1 \quad ,$$

mit

$$\Delta_{\mathcal{M}}^{(1)}(s, \mathcal{A}) := \det \begin{pmatrix} Z_{\mathcal{M}}^{(0,0)}(s) & \dots & Z_{\mathcal{M}}^{(0,l-1)}(s) & \zeta_{\mathcal{M}}(s, \hat{\alpha}_0, \mathcal{A}) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ Z_{\mathcal{M}}^{(h-1,0)}(s) & \dots & Z_{\mathcal{M}}^{(h-1,l-1)}(s) & \zeta_{\mathcal{M}}(s, \hat{\alpha}_{h-1}, \mathcal{A}) \end{pmatrix} \quad ,$$

$$\begin{pmatrix} Z_{\mathcal{M}}^{(0,l+1)}(s) & \dots & Z_{\mathcal{M}}^{(0,h-1)}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ Z_{\mathcal{M}}^{(h-1,l+1)}(s) & \dots & Z_{\mathcal{M}}^{(h-1,h-1)}(s) \end{pmatrix} \quad ,$$

$$\Delta_m(s) := \det \left(Z_m^{(k,1)}(s) \right)_{k,l=0,\dots,h-1} ,$$

$$Z_m^{(k,1)}(s) := \sum_{\hat{\alpha}} \zeta_{2m}(2s, \hat{\alpha}, \nu) \cdot \hat{\alpha}_1 \cdot \hat{\alpha}^2 = \hat{\alpha}_k$$

Beweis: Wegen

$$\begin{aligned} \lambda_m((\hat{\beta})^2, 4) &= (\lambda_m((\hat{\beta}), 4))^2 = \left\{ \exp\{m^T \text{Eq}(\hat{\beta})\} \prod_{p=1}^{\hat{r}} \left(\frac{\hat{\beta}(p)}{|\hat{\beta}(p)|} \right)^{t_p} \right\}^2 \\ &= \exp\{2m^T \text{Eq}(\hat{\beta})\} \prod_{p=1}^{\hat{r}} \left(\frac{\hat{\beta}(p)}{|\hat{\beta}(p)|} \right)^{2t_p} = \exp\{(2m)^T \text{Eq}(\hat{\beta})\} = \lambda_{2m}((\hat{\beta}), \nu) \end{aligned}$$

gilt für $k=0,\dots,h-1$

$$\begin{aligned} &\sum_{l=0}^{h-1} \lambda_m(s, \hat{\alpha}_1, 4) Z_m^{(k,1)}(s) \\ &= \sum_{l=0}^{h-1} \sum_{(\hat{\alpha}) \in \hat{\alpha}_1} \frac{\mu^2(\hat{\alpha})}{N(\hat{\alpha})^s} \lambda_m((\hat{\alpha}), 4) \sum_{\hat{\alpha}} \sum_{(\hat{\beta}) \in \hat{\alpha}} \frac{\lambda_{2m}((\hat{\beta}), \nu)}{N(\hat{\beta})^{2s}} \\ &\quad \hat{\alpha}_1 \cdot \hat{\alpha}^2 = \hat{\alpha}_k \\ &= \sum_{l=0}^{h-1} \sum_{(\hat{\alpha}) \in \hat{\alpha}_1} \frac{\mu^2(\hat{\alpha})}{N(\hat{\alpha})^s} \lambda_m((\hat{\alpha}), 4) \sum_{\hat{\alpha}} \sum_{(\hat{\beta}) \in \hat{\alpha}} \frac{\lambda_m((\hat{\beta})^2, 4)}{N(\hat{\beta})^{2s}} \\ &\quad \hat{\alpha}_1 \cdot \hat{\alpha}^2 = \hat{\alpha}_k \\ &= \sum_{l=0}^{h-1} \sum_{(\hat{\gamma}) \in \hat{\alpha}_k} \frac{\lambda_m((\hat{\gamma}), 4)}{N(\hat{\gamma})^s} \sum_{\hat{\alpha}} \sum_{(\hat{\beta}) \in \hat{\alpha}} \mu^2\left(\frac{\hat{\gamma}}{\hat{\beta}^2}\right) \\ &\quad \hat{\alpha}_1 \cdot \hat{\alpha}^2 = \hat{\alpha}_k \quad \frac{(\hat{\gamma})}{(\hat{\beta})^2} \in \hat{\alpha}_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{(\hat{\gamma}) \in \hat{\mathcal{Q}}_k} \frac{\lambda_{\mathfrak{m}}((\hat{\gamma}), 4)}{N(\hat{\gamma})^s} \sum_{l=0}^{h-1} \sum_{\substack{(\hat{\beta}) \\ (\hat{\beta})^2 | (\hat{\gamma}) \\ \frac{(\hat{\gamma})}{(\hat{\beta})^2} \in \hat{\mathcal{Q}}_1}} \mu^2\left(\frac{\hat{\gamma}}{\hat{\beta}^2}\right) \\
 &= \sum_{(\hat{\gamma}) \in \hat{\mathcal{Q}}_k} \frac{\lambda_{\mathfrak{m}}((\hat{\gamma}), 4)}{N(\hat{\gamma})^s} \sum_{\substack{(\hat{\beta}) \\ (\hat{\beta})^2 | (\hat{\gamma})}} \mu^2\left(\frac{\hat{\gamma}}{\hat{\beta}^2}\right) = \sum_{(\hat{\gamma}) \in \hat{\mathcal{Q}}_k} \frac{\lambda_{\mathfrak{m}}((\hat{\gamma}), 4)}{N(\hat{\gamma})^s} ;
 \end{aligned}$$

darin gilt das letzte Gleichheitszeichen, weil es genau eine Möglichkeit gibt, ein Ideal $(\hat{\gamma})$ in einen quadratischen und einen quadratfreien Faktor zu zerlegen, nämlich

$$(\hat{\gamma}) = \prod_{(\hat{\pi})} (\hat{\pi})^{2a(\hat{\pi}, \hat{\gamma}) + b(\hat{\pi}, \hat{\gamma})} = \left(\prod_{(\hat{\pi})} (\hat{\pi})^{2a(\hat{\pi}, \hat{\gamma})} \right) \cdot \left(\prod_{(\hat{\pi})} (\hat{\pi})^{b(\hat{\pi}, \hat{\gamma})} \right)$$

mit $a(\hat{\pi}, \hat{\gamma}) \in \mathbb{N}_0 \setminus \{0\}$, $b(\hat{\pi}, \hat{\gamma}) \in \{0, 1\}$. Damit ist bewiesen:

$$\sum_{l=0}^{h-1} M_{\mathfrak{m}}(s, \hat{\mathcal{Q}}_1, 4) Z_{\mathfrak{m}}^{(k, 1)}(s) = \zeta_{\mathfrak{m}}(s, \hat{\mathcal{Q}}_k, 4) , \quad k = 0, \dots, h-1 ;$$

Anwendung der Cramerschen Regel auf dieses lineare Gleichungssystem liefert die Behauptung.

Bemerkung: Hilfssatz 12 liefert zusammen mit Hilfssatz 5 die analytische Fortsetzung der Funktionen $M_{\mathfrak{m}}(s, \hat{\mathcal{Q}}, 4)$ in die ganze komplexe Zahlenebene. Da das analytische Verhalten dieser Funktionen im allgemeinen jedoch etwas unübersichtlich ist, soll für den Rest dieses § vorausgesetzt werden, daß der Körper K der folgenden Bedingung genügt:

Die Idealklassengruppe $\mathfrak{f}_K$ von K ist das direkte Produkt von Gruppen der Ordnung 2. ($K\mathfrak{f}_K$)

Mit

$$\zeta_{\mathfrak{M}}(s) := \sum_{(\hat{\alpha}) \neq (0)} \frac{\lambda_{\mathfrak{M}}((\hat{\alpha}), \mathcal{O})}{N(\hat{\alpha})^s}$$

gilt unter der Voraussetzung $(K\hat{f})$ offenbar

$$\zeta_{\mathfrak{M}}^{(k,l)}(s) = \delta_{k,l} \zeta_{2\mathfrak{M}}(2s) \quad , \quad k, l = 0, \dots, h-1 \quad ,$$

woraus folgt:

$$\Delta_{\mathfrak{M}}(s) = \zeta_{2\mathfrak{M}}^h(2s) \quad ,$$

$$\Delta_{\mathfrak{M}}^{(l)}(s, \mathfrak{f}) = \zeta_{2\mathfrak{M}}^{h-1}(2s) \zeta_{\mathfrak{M}}(s, \hat{\mathfrak{d}}_1, \mathfrak{f}) \quad , \quad l = 0, \dots, h-1 \quad ,$$

und

$$M_{\mathfrak{M}}(s, \hat{\mathfrak{d}}, \mathfrak{f}) = \frac{\zeta_{\mathfrak{M}}(s, \hat{\mathfrak{d}}, \mathfrak{f})}{\zeta_{2\mathfrak{M}}(2s)} \quad , \quad \hat{\mathfrak{d}} \in \hat{f} \quad . \quad (56)$$

Setzt man nun für $\sigma > 1$

$$\phi_{\mathfrak{M}}^{(M)}(s) := \sum_{\gamma} \frac{\mu^2(\gamma)}{N(\gamma)^s} \exp\{\mathfrak{M}^r \text{Eq}(\gamma)\} \quad ,$$

so erhält man aus Hilfssatz 3 sofort

$$\begin{aligned} \phi_{\mathfrak{M}}^{(M)}(s) &= \frac{1}{r_1^{-Q-1}} \sum_{t_{Q+2}, \dots, t_{r_1}=0,1} M_{\mathfrak{M}}(s, \hat{\mathfrak{d}}_0, \mathfrak{f}) \\ &= \frac{1}{r_1^{-Q-1}} \frac{1}{\zeta_{2\mathfrak{M}}(2s)} \sum_{t_{Q+2}, \dots, t_{r_1}=0,1} \zeta_{\mathfrak{M}}(s, \hat{\mathfrak{d}}_0, \mathfrak{f}) \quad . \end{aligned} \quad (57)$$

Da für $\sigma \geq 1/2 + 2p$

$$\left| \log \frac{1}{\zeta_{2\mathfrak{M}}(2s)} \right| = \left| \log \prod_{(\hat{\pi})} \left(1 - \frac{\lambda_{2\mathfrak{M}}((\hat{\pi}), \mathcal{O})}{N(\hat{\pi})^{2s}} \right) \right| = \left| \sum_{(\hat{\pi})} \log \left(1 - \frac{\lambda_{2\mathfrak{M}}((\hat{\pi}), \mathcal{O})}{N(\hat{\pi})^{2s}} \right) \right|$$

$$\begin{aligned}
 &= \left| \sum_{(\hat{n})} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\lambda_{2m}((\hat{n}), v)}{N(\hat{n})^{2s}} \right)^n \right| \leq \sum_{(\hat{n})} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{N(\hat{n})^{1+4\rho}} \right)^n \\
 &= \sum_{(\hat{n})} \frac{N(\hat{n})^{-1-4\rho}}{1-N(\hat{n})^{-1-4\rho}} = \sum_{(\hat{n})} \frac{1}{N(\hat{n})^{1+4\rho}-1} \leq 2 \sum_{(\hat{\alpha}) \neq (0)} \frac{1}{N(\hat{\alpha})^{1+4\rho}} \\
 &= 2\zeta_K(1+4\rho) \quad ,
 \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{1}{\zeta_{2m}(2s)} \right| &= \left| \exp \left\{ \log \frac{1}{\zeta_{2m}(2s)} \right\} \right| \leq \exp \left\{ \left| \log \frac{1}{\zeta_{2m}(2s)} \right| \right\} \\
 &\leq \exp \{ 2\zeta_K(1+4\rho) \}
 \end{aligned} \tag{58}$$

gilt, folgt aus (57) mit den Hilfssätzen 5 und 6, daß die Funktionen $\phi_m^{(M)}(s)$ die Voraussetzungen von Korollar 3 mit $c_0=0$, $z_0=1/2$, $z_1=1$, $\lambda=1/2$, $c_{10}(\rho)=c_3(\rho)\exp\{2\zeta_K(1+4\rho)\}$ und $P=1$ erfüllen. Da das Residuum von $\phi_v^{(M)}(s)$ im Punkte $s=1$ mit dem von $2^{-r_1+Q+1} \zeta_v(s, \hat{Q}_0, v) / \zeta_v(2s)$ übereinstimmt, folgt somit aus Korollar 3 und Hilfssatz 5a):

Satz 7: Unter der Voraussetzung (K_f) gilt für $\hat{r} \geq 2$, $x_1, \dots, x_{\hat{r}} > 0$ und für jedes $\delta > 0$:

$$M(x_1, \dots, x_{\hat{r}}) = \frac{(2\pi)^{r_2}}{|\sqrt{d}|} \frac{1}{\zeta_K(2)} x_1 \cdots x_{\hat{r}} + O\left((x_1 \cdots x_{\hat{r}})^{1-\frac{1}{2(\hat{r}+1)}+\delta}\right) .$$

2. Für $\hat{r} \geq 2$, $x_1, \dots, x_{\hat{r}} > 0$ sei

$$\begin{aligned}
 D^{(2)}(x_1, \dots, x_{\hat{r}}) &:= \sum_{\gamma > 0} d^2(\gamma) \\
 &\quad 0 < |\gamma^{(h)}| e_{h < x_h}
 \end{aligned}$$

mit $d(\hat{\alpha}) := d_2(\hat{\alpha})$ wie in §4.1. Setzt man für $\sigma > 1$

$$\phi_{\mathfrak{m}}^{(2)}(s) := \sum_{\gamma} \frac{d^2(\gamma)}{N(\gamma)^s} \exp\{\mathfrak{m}' E q(\gamma)\} \quad ,$$

so gilt unter der Voraussetzung (Kf):

$$\begin{aligned} \phi_{\mathfrak{m}}^{(2)}(s) &= \frac{1}{2^{r_1-1}} \frac{1}{\zeta_{2\mathfrak{m}}(2s)} \cdot \\ &\cdot \sum_{t_{Q+2}, \dots, t_{r_1} = 0, 1} \sum_{\substack{(\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_4) \\ \hat{\alpha}_1 \dots \hat{\alpha}_4 = \hat{\alpha}_0}} \prod_{j=1}^4 \zeta_{\mathfrak{m}}(s, \hat{\alpha}_j, 4) \quad . \end{aligned} \quad (59)$$

Wegen Hilfssatz 3 und (56) ist hierzu nur zu zeigen:

$$\begin{aligned} &\sum_{(\gamma) \in \hat{\alpha}_0} \frac{d^2(\gamma)}{N(\gamma)^s} \lambda_{\mathfrak{m}}((\gamma), 4) \\ &= \sum_{\substack{(\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_4) \\ \hat{\alpha}_1 \dots \hat{\alpha}_4 = \hat{\alpha}_0}} \zeta_{\mathfrak{m}}(s, \hat{\alpha}_1, 4) \zeta_{\mathfrak{m}}(s, \hat{\alpha}_2, 4) \zeta_{\mathfrak{m}}(s, \hat{\alpha}_3, 4) M_{\mathfrak{m}}(s, \hat{\alpha}_4, 4) \quad ; \end{aligned} \quad (60)$$

es gilt nun nach (42)

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{(\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_4) \\ \hat{\alpha}_1 \dots \hat{\alpha}_4 = \hat{\alpha}_0}} \zeta_{\mathfrak{m}}(s, \hat{\alpha}_1, 4) \zeta_{\mathfrak{m}}(s, \hat{\alpha}_2, 4) \zeta_{\mathfrak{m}}(s, \hat{\alpha}_3, 4) M_{\mathfrak{m}}(s, \hat{\alpha}_4, 4) \\ &= \sum_{\substack{(\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_4) \\ \hat{\alpha}_1 \dots \hat{\alpha}_4 = \hat{\alpha}_0}} \sum_{(\hat{\alpha}) \in \hat{\alpha}_1 \dots \hat{\alpha}_3} \frac{d_{\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_3}(\hat{\alpha})}{N(\hat{\alpha})^s} \lambda_{\mathfrak{m}}((\hat{\alpha}), 4) \cdot \\ &\cdot \sum_{(\hat{\beta}) \in \hat{\alpha}_4} \frac{\mu^2(\hat{\beta})}{N(\hat{\beta})^s} \lambda_{\mathfrak{m}}((\hat{\beta}), 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{(\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_3)} \sum_{(\gamma) \in \hat{\alpha}_0} \frac{\lambda_{\mathcal{M}}((\gamma), 4)}{N(\gamma)^S} \sum_{\substack{(\hat{\alpha})/(\gamma) \\ (\hat{\alpha}) \in \hat{\alpha}_1 \cdots \hat{\alpha}_3}} d_{\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_3}(\hat{\alpha}) \mu^2\left(\frac{\gamma}{\hat{\alpha}}\right) \\
 &= \sum_{(\gamma) \in \hat{\alpha}_0} \frac{\lambda_{\mathcal{M}}((\gamma), 4)}{N(\gamma)^S} \sum_{(\hat{\alpha})/(\gamma)} d_3(\hat{\alpha}) \mu^2\left(\frac{\gamma}{\hat{\alpha}}\right) ;
 \end{aligned}$$

(60) ist also bewiesen, wenn gezeigt ist daß gilt:

$$\sum_{(\hat{\alpha})/(\gamma)} d_3(\hat{\alpha}) \mu^2\left(\frac{\gamma}{\hat{\alpha}}\right) = d^2(\gamma) ;$$

da auf beiden Seiten dieser Gleichung multiplikative Funktionen stehen, genügt es, diese Gleichung für Primidealpotenzen (γ) nachzuweisen; sei also $(\gamma) = (\hat{\pi})^k$ ($k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$); dann ist

$$\begin{aligned}
 \sum_{(\hat{\alpha})/(\hat{\pi})^k} d_3(\hat{\alpha}) \mu^2\left(\frac{\hat{\pi}^k}{\hat{\alpha}}\right) &= \sum_{l=0}^k d_3(\hat{\pi}^l) \mu^2(\hat{\pi}^{k-l}) = d_3(\hat{\pi}^{k-1}) + d_3(\hat{\pi}^k) \\
 &= \sum_{(\hat{\beta})/(\hat{\pi})^{k-1}} d(\hat{\beta}) + \sum_{(\hat{\beta})/(\hat{\pi})^k} d(\hat{\beta}) = \sum_{l=0}^{k-1} d(\hat{\pi}^l) + \sum_{l=0}^k d(\hat{\pi}^l) \\
 &= 2 \sum_{l=0}^{k-1} (l+1) + (k+1) = k(k+1) + (k+1) = (k+1)^2 = d^2(\hat{\pi}^k) .
 \end{aligned}$$

Aus (59), (58) und (43) entnimmt man nun mit den Hilfssätzen 5a) und 6, daß die Funktionen $\phi_{\mathcal{M}}^{(2)}(s)$ die Voraussetzungen von Hilfssatz 9 mit $c_0=0$, $z_0=1/2$, $z_1=1$, $\lambda=2$, $c_{10}(\rho)=c_3^4(\rho)$, $\exp\{2\zeta_K(1+4\rho)\}$ und $P=4$ erfüllen. Hilfssatz 9 liefert daher:

Satz 8: Unter der Voraussetzung (K_f) gilt für $\hat{r} \geq 2$, $x_1, \dots, x_{\hat{r}} > 0$ und für jedes $\delta > 0$:

$$D^{(2)}(x_1, \dots, x_{\hat{r}}) = x_1 \cdots x_{\hat{r}} \frac{w_0}{R} \sum_{\kappa=0}^3 B_{\kappa}^{(2)} (\log x_1 \cdots x_{\hat{r}})^{\kappa} +$$

$$+ O\left((x_1 \cdots x_{\hat{r}})^{1 - \frac{1}{2(n+1)} + \delta}\right)$$

mit

$$B_{\kappa}^{(2)} := \frac{1}{\kappa!} \sum_{\rho=\kappa+1}^4 (-1)^{\rho-1-\kappa} \binom{r+\rho-1-\kappa}{r} A_{\rho}^{(2)},$$

worin die $A_{\rho}^{(2)}$ die Koeffizienten des Hauptteils der Laurent-Entwicklung von $\Phi_{\mathcal{V}}^{(2)}(s)$ um den Punkt $s=1$ bezeichnen. Der höchste Koeffizient lautet:

$$\frac{w_0}{R} B_3^{(2)} = \frac{(2\pi)^{r_2}}{|\sqrt{d}|} \frac{1}{6\zeta_K(2)} \left(\frac{2^{r_1} (2\pi)^{r_2} R_0 h}{w |\sqrt{d}|} \right)^3.$$

Beweis: In Hilfssatz 9 ist $l_p = \langle e_p \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \rangle + 1$, $p=1, \dots, \hat{r}$, zu setzen, also

$$\sum_{p=1}^{\hat{r}} (l_p - 1) = \sum_{p=1}^{\hat{r}} e_p = n.$$

Die Berechnung des höchsten Koeffizienten verläuft analog wie im Beweis zu Satz 3.

Die Ergebnisse dieses § wurden in der Einleitung als Satz B zitiert.

Literatur

- [1] Hecke, E., Über die L-Funktionen und den Dirichletschen Primzahlsatz für einen beliebigen Zahlkörper, Nachr. König. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. (1917), 299-318.
- [2] Hecke, E., Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen (Zweite Mitteilung), Math. Z., 6(1920), 11-51.
- [3] Landau, E., Über Ideale und Primideale in Idealklassen, Math. Z., 2(1918), 52-154.
- [4] Rademacher, H., On the Phragmén-Lindelöf theorem and some applications, Math. Z., 72(1959), 192-204.
- [5] Schaal, W., On the expression of a number as the sum of two squares in totally real algebraic number fields, Proc. Amer. Math. Soc., 16(1965), 529-537.
- [6] Siegel, C.L., Mittelwerte arithmetischer Funktionen in Zahlkörpern, Trans. Amer. Math. Soc., 39(1936), 219-224.

Lebenslauf

Am 15. Januar 1949 wurde ich in Bottrop (Nordrhein-Westfalen) geboren. Meine Eltern sind der Malermeister Walter Grotz und seine Ehefrau Waltraud, geb. Fischer.

Ich bin in Bottrop aufgewachsen und ging dort zur Volksschule. Von 1959 bis 1967 besuchte ich das Städtische Gymnasium Bottrop und legte dort im Juli 1967 die Reifeprüfung des altsprachlichen Zweiges ab.

Von Oktober 1967 bis März 1969 war ich als Wehrpflichtiger bei der Bundeswehr.

Im April 1969 begann ich an der Philipps-Universität Marburg mit dem Studium der Mathematik und Physik. Dort legte ich im April 1971 die Diplom-Vorprüfung und im Juni 1974 die Diplom-Hauptprüfung in Mathematik ab.

Ich hörte Vorlesungen insbesondere bei den Herren Professoren Körle, Körner, Ludwig, Madelung, Niemeyer, Richert, Schaal, P.G.Schmidt, Stuke und Wirsing.

Ich bin seit Juli 1974 als wissenschaftlicher Angestellter am Fachbereich Mathematik der Universität Marburg beschäftigt.

Seit September 1975 bin ich mit der Lehramtsreferendarin Christiane Grotz, geb. Hessling-Zeinen verheiratet.

